МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 12 024

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

   161 - 1

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1;45]$, $[46;90]$, $[91;135]$, $[136;180]$, $[181;225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-024
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Найдём отрезки, которые высекает парабола из отрезков $y=98$, $y=18$ и $y=0$. Отрезок лежащий на прямой $y=98$, равен: 14. Находим его, так $98=2x^2 \Rightarrow x^2=49$ $x=\pm 7$, т.е. отрезок от $(7\cdot 2)$ будет равен 14. Отрезок лежащий на прямой 18, равен 6. Найдём его, так $18=2x^2 \Rightarrow x^2=9$ $x=\pm 3$, т.е. отрезок $(3\cdot 2)$ будет равен 6. Отрезок лежащий на прямой $y=a$, равен $\sqrt{2a}$. Найдём его, так $a=2x^2$ $x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$, т.е. отрезок будет равен $2\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2a}$. Получим стороны 14, 6, $\sqrt{2a}$. Заметим, что против ~~угла~~ $120°$, может лежать сторона 14 или $\sqrt{2a}$, т.к. угол равный $120°$ лежит против наибольшей стороны. По Th косинусов, получим 2 варианта ~~когда~~ уравнений.

$(\sqrt{2a})^2=14^2+6^2-2\cdot 14\cdot 6\cdot\cos 120°$

$2a=196+36-2\cdot 14\cdot 6\cdot(-\frac{1}{2}) \Rightarrow a=\frac{196+36+84}{2}=$

$=158$

$14^2=(\sqrt{2a})^2+6^2-2\sqrt{2a}\cdot 6\cdot\cos 120°$

$196 = 2a + 36 - 12\sqrt{2a} \cdot (-\frac{1}{2})$

$160 = 2a + 6\sqrt{2a}$

$\sqrt{2a} = t$

$t^2 + 6t - 160 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 160 = 26^2$

$t_{1;2} = \frac{-6 \pm 26}{2} = -16; 10.$

не подходит, т.к. корень ≥ 0 ($\sqrt{2a} \geq 0 \Rightarrow t \geq 0$)

$t = \sqrt{2a}$

$10 = \sqrt{2a}$

$a = \frac{100}{2} \Rightarrow a = 50$

Ответ: 158; 50.

№2

Чтобы получить наибольшее значение функции $g(x)$, $\sin^2 x$ должен равен 0

$\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$

$x = \pi n, n \in Z$

Пусть $n = 0$, тогда $x = 0$, подставим в $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(0) = \underbrace{\sin 0}_{0} \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} - \underbrace{\sin^2 0}_{0} + 1 + 4 = 5$

Чтобы получить ~~наибольшее~~ наименьшее значение функции $g(x)$, $\sin^2 x$ должен равен 1 ~~или -1~~

$\sin^2 x = 1$

$\sin x = 1 \qquad \sin x = -1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \qquad x = -\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Пусть $n = 0$, тогда $x = \frac{\pi}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

подставим $x = \frac{\pi}{2}$ в $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{-1} \cdot \underbrace{\sin\frac{7\pi}{2}}_{-1} - \underbrace{\sin^2\frac{\pi}{2}}_{1} + \underbrace{\cos^2 5\frac{\pi}{2}}_{0} + 4$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \cancel{1} + 1 = 5$$

Подставим $x = -\frac{\pi}{2}$ в $g(x)$

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin -\frac{3\pi}{2}}_{1} \cdot \underbrace{\sin \frac{-7\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin^2 -\frac{\pi}{2}}_{1} + \underbrace{\cos^2 -\frac{5\pi}{2}}_{0} + 4$$

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 + 0 + 4 = 4$$

Таким образом, max = 5, а min = 4.

Ответ: max = 5, min = 4.

№3

1) Заметим, что на первом месте в 14-значном числе может стоять 7 или 8.

2) 8-ки можно поставить 10 способами, т.к они стоят все рядом по условию.

3) Рассмотрим случай когда первая цифра это 8, тогда последующие цифр это тоже 8. Оставшиеся 10 ~~чисел~~ цифр

в 17-ти значном числе могут быть 7 или 0, т.е. 2 варианта, и того всего вариантов когда в начале стоят 8 — 2^{10}

$$\underbrace{8888888}_{7}\underbrace{\begin{matrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\7&7&7&7&7&7&7&7&7&7\end{matrix}}_{10}$$

4) Когда первая цифра это 7, что остаётся 16 свободных мест, ещё 7 занимают 8. Оставшиеся 9 мест занимают 0 и 7. Всего вариантов расстановки 2^9

$$9\begin{cases}7\underbrace{8888888}_{7}\overbrace{\begin{matrix}7&7&7&7&7&7&7&7&7\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{matrix}}^{9} & \times 2^9\\ 7\overbrace{\begin{matrix}7\\0\end{matrix}}^{1}8888888\overbrace{\begin{matrix}7&7&7&7&7&7&7&7\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{matrix}}^{8} & \times 2^9\\ 7\overbrace{\begin{matrix}7&7\\0&0\end{matrix}}^{2}8888888\overbrace{\begin{matrix}7&7&7&7&7&7&7\\0&0&0&0&0&0&0\end{matrix}}^{7} & \times 2^9\\ \cdots\\ 7\overbrace{\begin{matrix}7&7&7&7&7&7&7&7&7\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{matrix}}^{9}\underbrace{8888888}_{7} & \times 2^9\end{cases}$$

5) Итого вариантов $2^{10}+9\cdot 2^9 = 2^9\cdot 2+9\cdot 2^9 =$
$= 11\cdot 2^9 = 5632$

Ответ: 5632

№6

ОДЗ: $\begin{cases} x+4>0\\ \sqrt{x+7}\geq 0\\ \sqrt{x+7}-x\neq 1\\ \sqrt{x+7}-x>0\end{cases}$ $\begin{cases} x>-4\\ x\geq -7\\ x+7\neq (x+1)^2\\ x+7>x^2\end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-027
ШИФР

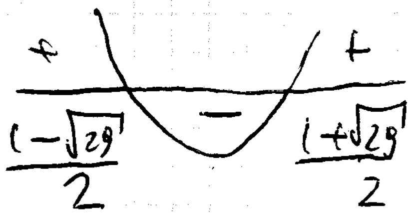
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

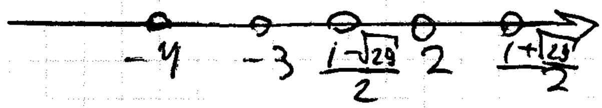
$x^2 - x - 7 < 0$ $\qquad$ $x+7 \neq x^2+2x+1$

$D = 1+28 = 29$ $\qquad$ $x^2+x-6 \neq 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$ $\qquad$ $D = 1+4\cdot 6 = 25$



$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$ $\qquad$ $x_{1;2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$ $(-3; 2$



$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

Из ОДЗ:

$x \in \left[\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\sqrt{x+7} - x \leq x+4$

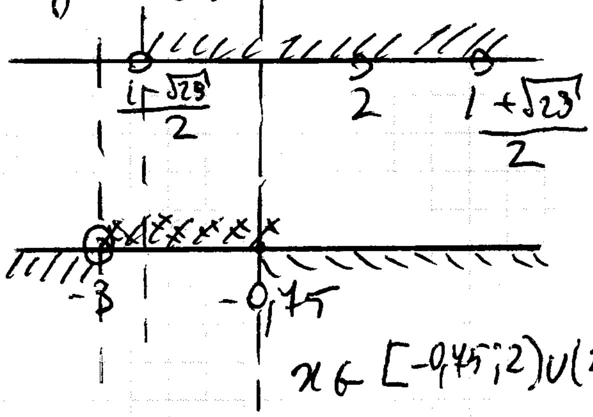
$\sqrt{x+7} \leq 2x+4$

$x+7 \leq 4x^2+16x+16$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$D = 225 - 4\cdot 4\cdot 9 = 81$

$x = \frac{-15 \pm 9}{8} = -3; -0{,}75.$



$x \in [-0{,}75; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$

$\cancel{x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; -0{,}75\right]}$

Ответ: $\cancel{\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; -0{,}75\right]}$ $x \in [-0{,}75; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \cup$

$\cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$

№7

Для того, чтобы разность любых чисел была не кратна 45, то по очереди складываем 6-ки из промежутка $[1; 45]$ ~~(сложите первые 6-ки из про-~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

~~[illegible]~~ – сложить первые 6-ки, из
[46 ; 90] – сложить вторые 6-ки,
[91 ; 135] – сложить третьи 6-ки, и т.д.

$1+2+3+4+5+6+52+53+54+55+56+57+\ldots =$
$= 3165$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)