

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

12-026

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2$  пересекает прямые  $y = 98$ ,  $y = 18$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ .
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 12$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 58$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $5 : 12$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 45]$ ,  $[46; 90]$ ,  $[91; 135]$ ,  $[136; 180]$ ,  $[181; 225]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$y = 2x^2 \quad ; \quad y = 98 \quad ; \quad y = 18 \quad ; \quad y = a$$

$$98 = 2x^2$$

$$18 = 2x^2$$

$$49 = x^2$$

$$9 = x^2$$

$$x = \pm 7$$

$$x = \pm 3$$

$$x^2 = \frac{a}{2}$$

-1

1

$$x = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

(14)

(6)

$$2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$$

14

6

$\sqrt{2a}$

$$2a = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos 120$$

$$a = \frac{196 + 36 + 84}{2} = 158$$

~~$$2\sqrt{\frac{a}{2}}$$~~

~~$$2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$$~~

~~2a =~~

II случай

$$196 = 2a + 36 + \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot 12$$

$$80 = a + 6\sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$80 - a = 6\sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$a^2 - 178a + 6400 = 0$$

$$D = 6084$$

~~Ответ:  $a = 158$ ;  $a = 5$~~

II случай

~~$$14^2 = 6^2 + 2a + \sqrt{2a} \cdot 6$$~~

~~$$196 - 36 = 2a + \sqrt{2a} \cdot 6$$~~

~~$$160 = 2a + 6\sqrt{2a}$$~~

~~$$2a = t^2$$~~

~~$$t^2 + 6t - 160 = 0$$~~

~~$$D = 36 + 640 = 676$$~~

~~$$t = \frac{-6 \pm 26}{2}$$~~

~~$$t = 10 \text{ или } -16$$~~

~~$$a = 5$$~~

~~$$a_{1,2} = \frac{178 \pm 78}{2} = (50) \text{ и } 128 \text{ не подходит}$$~~

Ответ:  $a = 158$ ;  $a = 50$ .

№5

~~$$\log \sqrt{x+7} - 1 \geq x+4$$~~

~~$$\sqrt{x+7} - x \geq x+4$$~~

~~$$x+7 - 2x - 4 \geq 0$$~~

~~$$-2x - 4 \geq 0$$~~

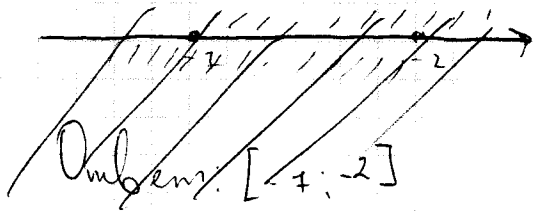
~~$$-2x \geq 4$$~~

~~$$x \leq -2$$~~

~~$$x+7 \geq 0$$~~

~~$$x \geq -7$$~~

~~$$x \in [-7; -2]$$~~



$$x \geq -7$$

№5

$$\left(\sqrt{x+7} - 2\right)^k \geq x+4, k \geq 1$$

$$\sqrt{x+7} - 2 \geq x+4$$

$$(x+7 \geq 4(x+4))^2$$

$$x+7 \geq 4x^2 - 16x + 16$$

$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$D = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8} = -3 \text{ и } -0,75$$

$$\text{Область: } x \in [-3; -0,75]$$

№2

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4, g(x)_{\max}$$

$$\Rightarrow \sin 3x + 1 = \sin 7x + \sin^2 x + \cos^2 5x$$

$$1 - 1 + 1 + 4 = 5 \Rightarrow g(x)_{\max} = 5$$

$$\text{Область: } 5$$



12 026 ШИФР
----------------

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



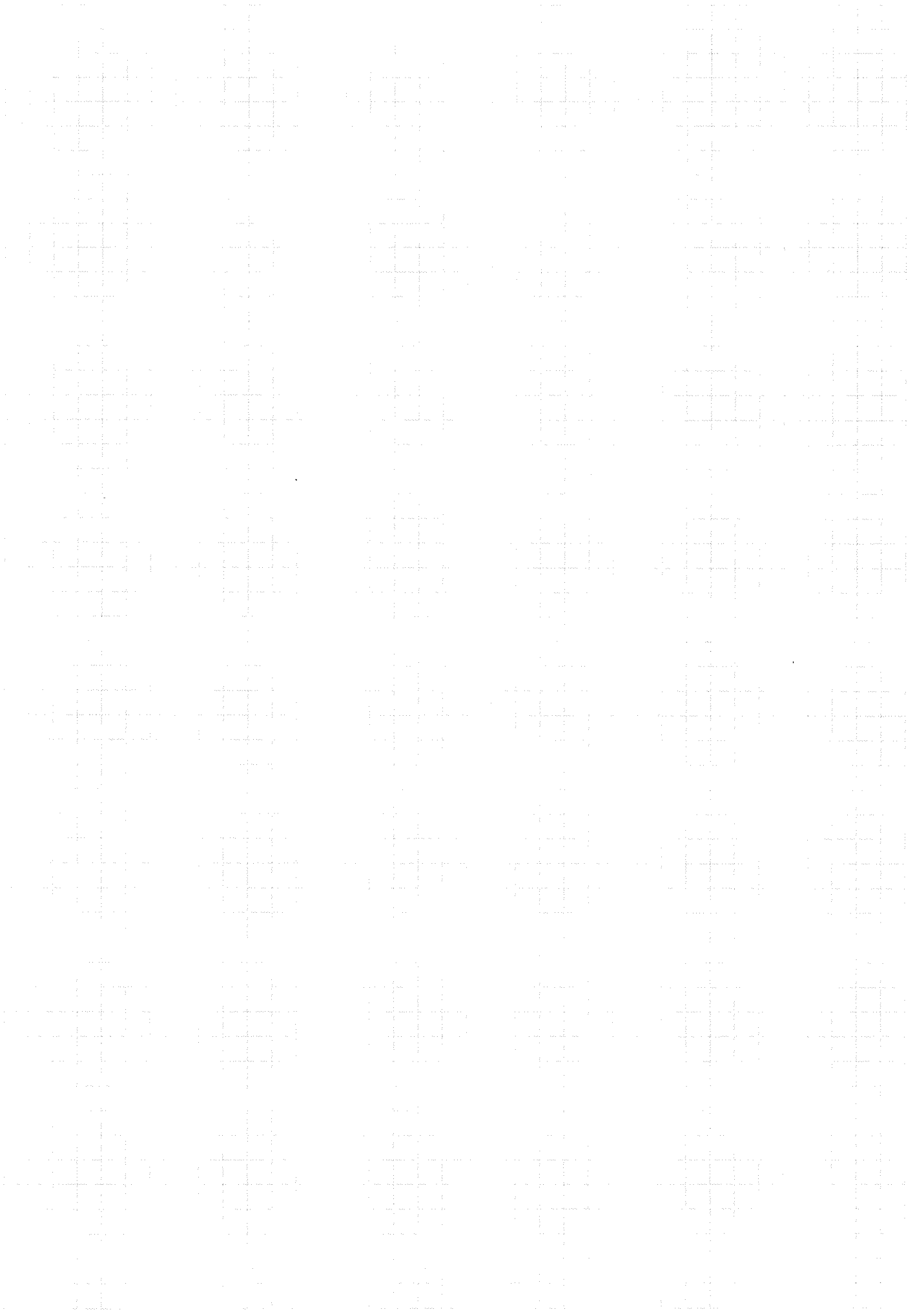


12 - 026

ШИФР

(заполняется секретарём)

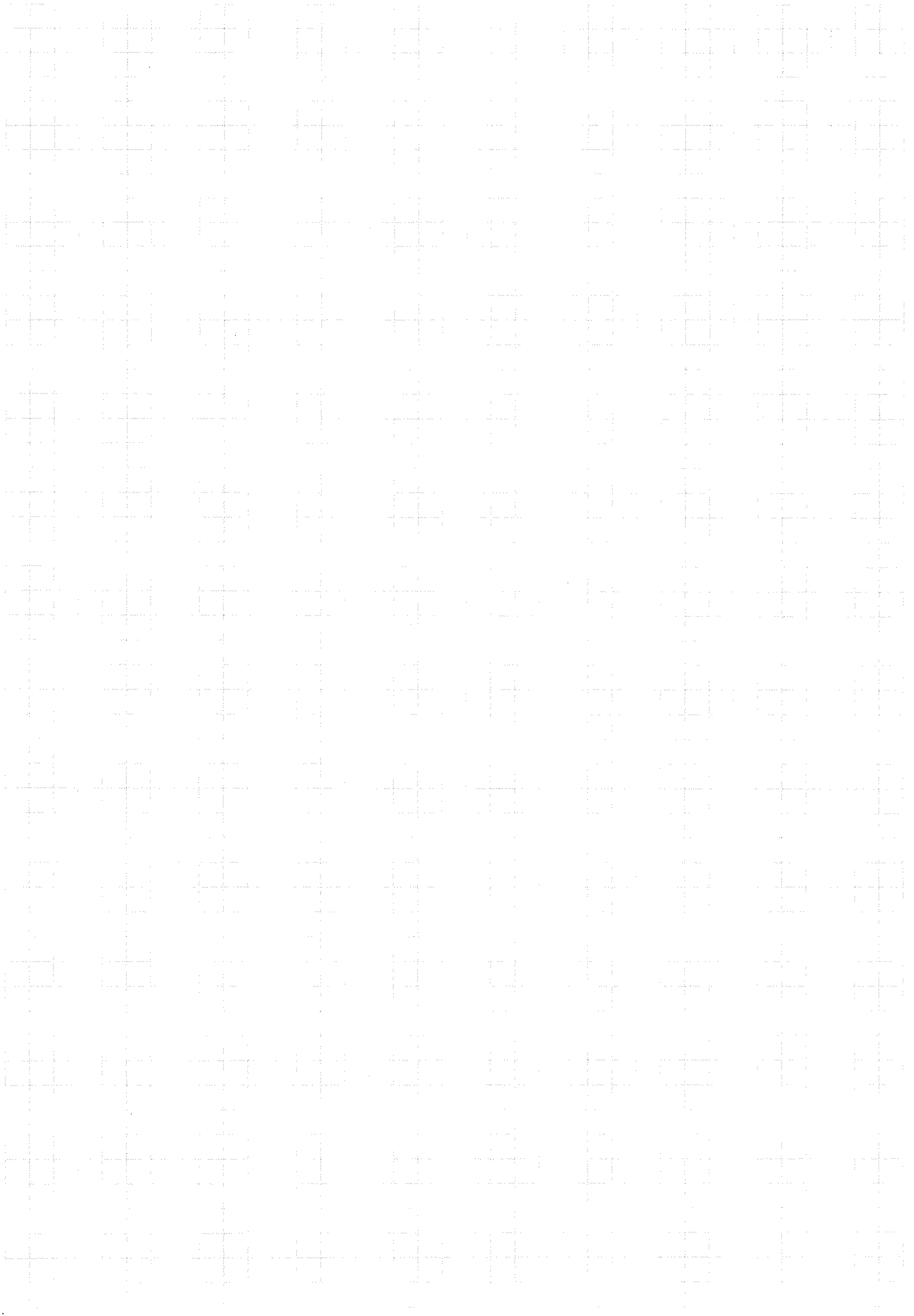
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)