

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

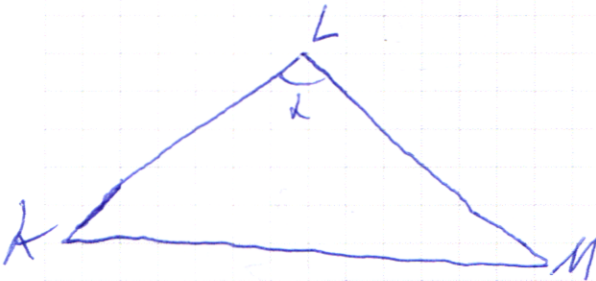
2-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = 2x^2$ парабола пересекает прямые $y = 98$ и $y = 18$,
 $y = 98$ если она соответственно равна 98 и 18
 $y = 18$ $2x^2 = 98$ $2x^2 = 18$
 $y = a$ $x = \pm 7$ $x = \pm 3$
 Отрезок $y = 18$ равен 6
 а отрезок $y = 98$ равен 14



$KM = 14$
 $KL = 6$
 $\alpha = 120^\circ$

$$KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2 \cdot KL \cdot LM \cdot \cos \alpha$$

$$196 = 36 + LM^2 + 6LM$$

$$LM^2 + 6LM - 160 = 0$$

$$LM = -16 \text{ и } LM = 10$$

отрезок $y = a$
 равен 10

$x = \pm 5$ $a = 2x^2$
 $a = 50$
 ответ $a = 50$

2) $g(x) = \sin^2 x \sin^2 x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 10x - \frac{(1 - \cos 2x)}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} + 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 10x - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos 10x}{2} + 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + 4$$

$$g'(x) = -2 \sin 4x - \sin 2x \quad \begin{cases} 2 \sin 4x + \sin 2x = 0 \\ \sin 2x (4 \cos 2x + 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) + 4$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$g(x)_{\max} \quad \sin 2x = 0$$

$$g(x)_{\max} = \frac{1}{2} (1+1) + 4 = 5$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{4}$$

$$g(x)_{\min} = \frac{1}{2} \left(\frac{-14}{16} - \frac{1}{4} \right) + 4 = \frac{-18}{32} + 4 =$$

$$\cos 4x = \frac{1}{16} - \frac{15}{16} = -\frac{14}{16}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{4} \quad = \frac{110}{32} = \frac{55}{16}$$

$$\frac{-14}{16} - \frac{1}{4} = \frac{-14-4}{16} = \frac{-18}{16}$$

$$\text{ответ } g(x)_{\max} = 5$$

$$g(x)_{\min} = \frac{55}{16}$$

$$\frac{-32}{4} = 128$$

$$5) \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 1 \\ \sqrt{x+7}-x > 1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

$$\sqrt{x+7}-x > 1$$

$$4x^2 + 16x + 16 \geq x+7$$

$$x+7 > x^2 + 2x + 1$$

$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$x^2 + x - 6 < 0$$

$$D = 225 - 144 = 81$$

$$x \in (-3, 2)$$

$$x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-15-9}{8} = -3$$

$$x \in \left[-\frac{3}{4}, 2\right)$$

$$x \in (-\infty, -3] \cup \left[-\frac{3}{4}, \infty\right)$$

$$\begin{cases} x+4 < 1 \\ \sqrt{x+7}-x < 1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$$

$$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$$

$$\sqrt{x+7}-x < 1$$

$$4x^2 + 15x + 9 \leq 0$$

$$x+7 < x^2 + 2x + 1$$

$$x_1 = -3$$

$$x \in (-\infty, -3] \cup (2, \infty)$$

$$x_2 = -\frac{3}{4}$$

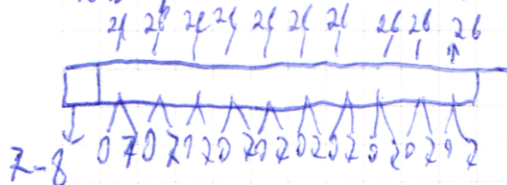
$$x \in \left[-3, -\frac{3}{4}\right)$$

$$\text{ответ } x \in \left[-\frac{3}{4}, 2\right)$$

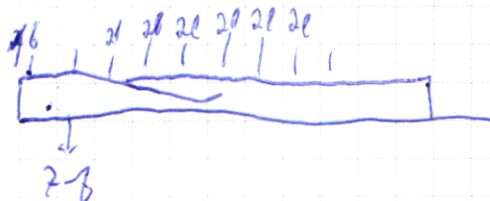
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) После использования 7 '8' цифр нам остается использовать еще 10 цифр: Первым цифрой тогда 7-8 цифр стоят впереди остальных мест может быть 0 или 2 так у нас получается 2^{10} 17-значных чисел. А в остальных случаях в первом месте не может быть цифра 0 и так у нас

получается $10 \cdot 2^9$ 17-значных чисел.



$$2^{10} + 10 \cdot 2^9 = 2^{10} + 5 \cdot 2^{10} = 6 \cdot 2^{10} = 6144 - 12 = 6132$$



2^9 и таких случаев 10

ответ: ~~6144~~ 6132

7) Нам надо выбрать такие числа ^{после деления на 45} в которых остаток \checkmark или повторимся, и их сумма была максимальной. Тогда числа получатся.

1 2 3 4 5 6

$45+7, 45+8, 45+9, 45+10, 45+11, 45+12$

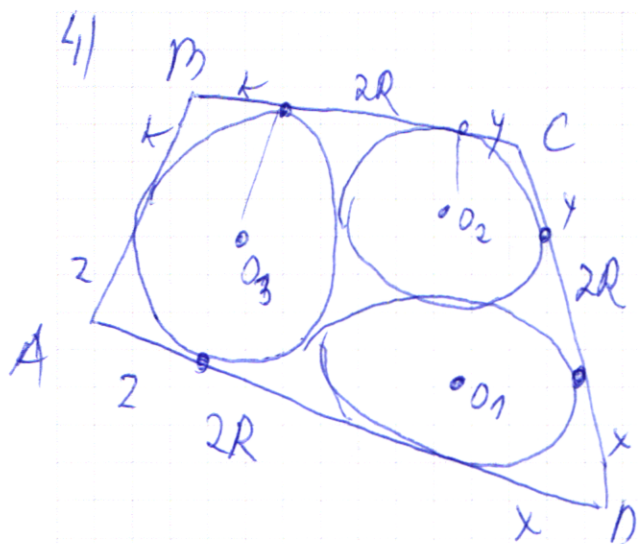
$+ 90+13, 90+14, 90+15, 90+16, 90+17, 90+18$

$135+19, 135+20, 135+21, 135+22, 135+23, 135+24$

$180+25, 180+26, 180+27, 180+28, 180+29, 180+30$

ответ 3165

$$6(45+90+135+180) + 1+2+3+\dots+30 = 2250 + 465 = 3165$$



$$R_1 = R_2 = R_3$$

a) $AB + BC - AD - CD = 12$

$$x + 2 + 2R + k + y + 2R - 2 - k - y - x - 2R = 12$$

$$2R = 12$$

$$R = 6$$

ответ 6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1 \quad x > -4$$

$$x > -7$$

$$x+4 \geq 1 \quad x > -3$$

$$\sqrt{x+7}-x > 0$$

$$x+7 > x^2$$

$$x^2-x-7 < 0$$

$x \in$

$$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

$$4x^2+16x+16 \geq x+7$$

$$4x^2+15x+9 \geq 0$$

$$D=225-144=81$$

$$x = \frac{-15 \pm 9}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_1 = \frac{-15-9}{8} = -3$$

$$\sqrt{x+7}-x \geq 1$$

$$x+7 \geq x^2+x+1$$

$$x^2+x-6 < 0$$

$$x \in (-3, 2)$$

$$x \in (-\infty, -3] \cup [-\frac{3}{4}, \infty)$$

$$x \in \left[\frac{3}{4}, 2 \right)$$

$$\sqrt{x+7}-x < 1$$

$$\sqrt{x+7}-x > 0$$

$$x+4 < 1$$

$$x+4 > 0$$

$$x+4 \leq \sqrt{x+7}-x$$

$$4x^2+16x+16 \leq x+7$$

$$4x^2+15x+9 \leq 0$$

$$x \in \left[-3, -\frac{3}{4} \right]$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ -32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1524 \\ 6 \end{array}$$

$$x+7 < x^2+x+1$$

$$x^2+x-6 > 0$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$$

$$2-3^{16}-3-2^{12}-2^{16}-2^{16}$$

~~2~~

$$2-3^{16}-2^{12}-2^{12} \quad 2^{25}=32$$

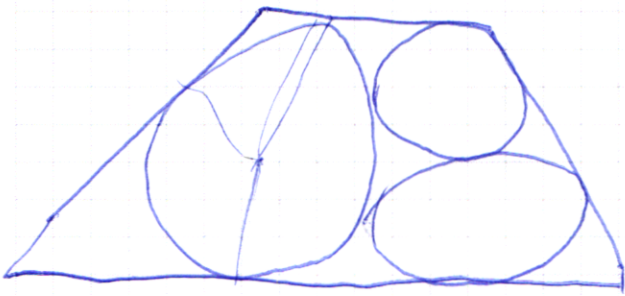
$$2-3^{16}-2^{12}-2^{12}$$

$$2(3^{16}-2^{12}) \quad 2^{10}+10=2^9$$

$$6-2^{10}$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$$6-2^{10}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = 2x^2$
 $y = 98$
 $y = 18$

$y = 2x^2$ парабола пересекает прямую $x = 98$ когда
она равна 98 $2x^2 = 98$

маленькие $2x^2 = 16$ $x = \pm 2$
 $x = \pm 3$
Если парабола

$A \{-2, 98\}$

$B \{2, 98\}$

$AB = 14$

$C \{-3, 18\}$

$D \{3, 18\}$

$CD = 6$

$\alpha = 120^\circ$



$KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2KL \cdot LM \cos \alpha$

$KM^2 = 196 + 36$

$g(x) = \sin^2 x \sin^2 2x - \sin^2 x - \sin^2 x + \cos^2 2x + 4$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$g(x) = -\frac{1}{2} (\cos 10x - \cos 4x) - \sin^2 x + \frac{1 + \cos 10x}{2} + 4$ $\cos x = \frac{1}{16} - \frac{15}{16} = -\frac{14}{16}$

$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 10x - \sin^2 x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 10x}{2} + 4$

$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \sin^2 x + 4,5$

$-2 \sin 4x - \sin 2x = 0$

~~$g(x) = 2 \cos 2x -$~~

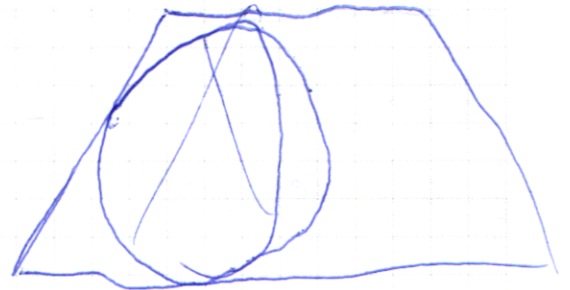
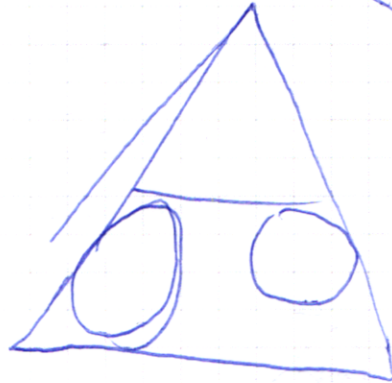
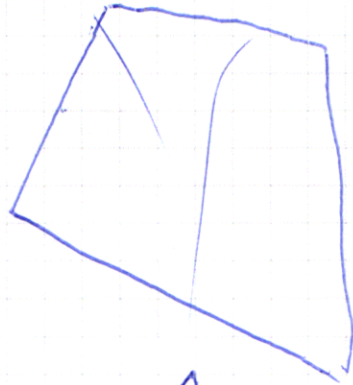
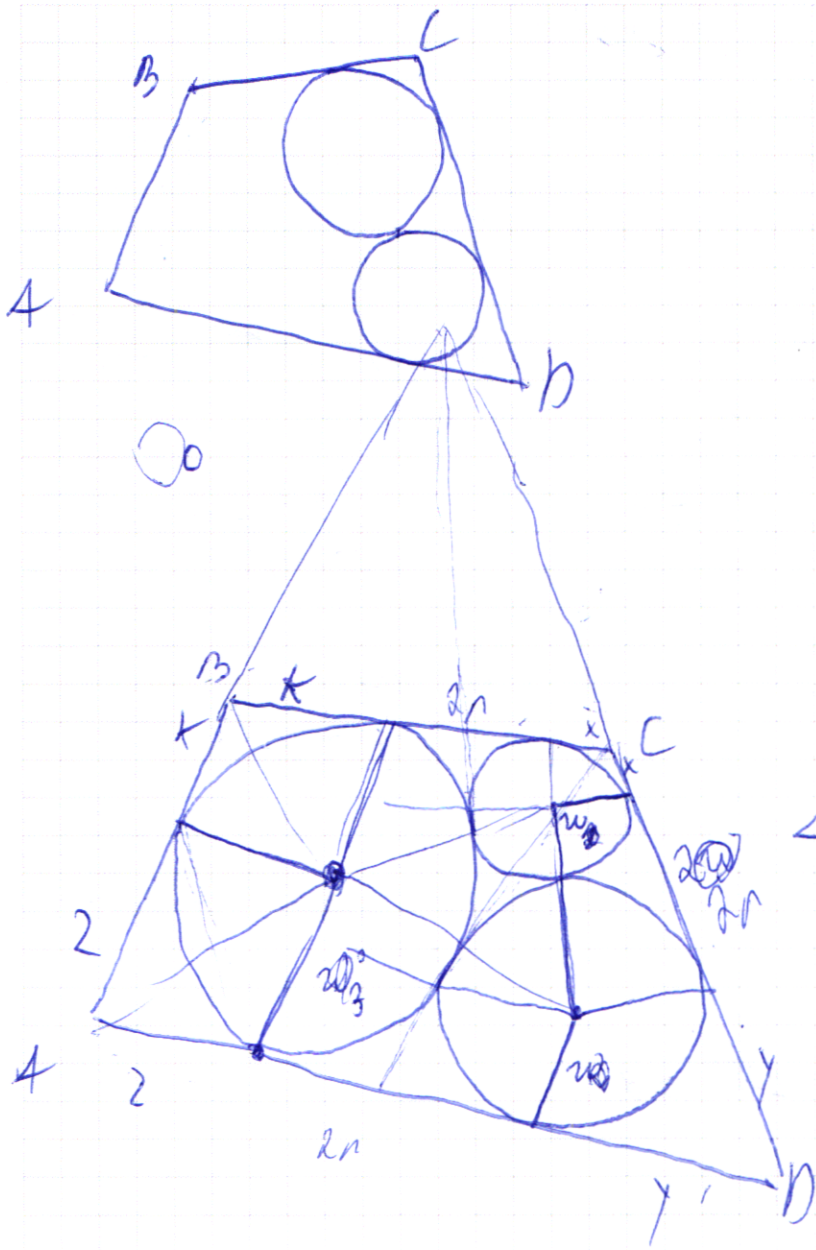
$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1 + \cos 2x}{2} + 4,5$

$2 \sin^2 4x + \sin 2x = 0$

$\sin 2x (4 \cos 2x + 1) = 0$

$g(x) = \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) + 4$

$g'(x) = 0 - 2 \sin 4x - \sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4}$



$$S = \frac{1}{2} BQL = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 = 3$$

$$\frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

$$\frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

$$\frac{25}{49} = 12$$

$$S_{FOL} = \frac{9 \cdot 55}{85}$$

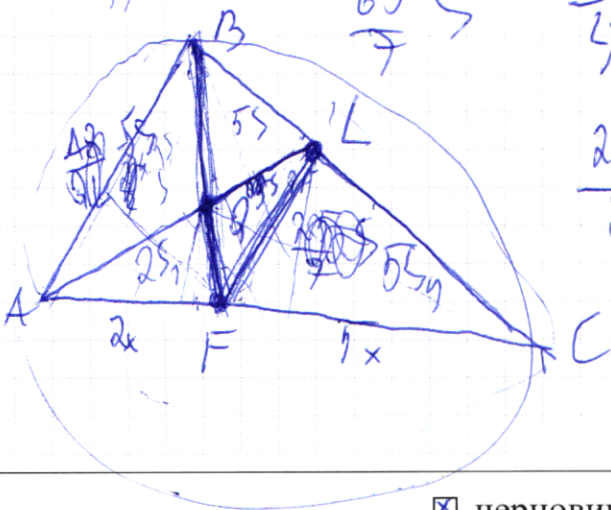
$$\frac{1}{6} = \frac{138}{85}$$

$$S_{49M} = \frac{138}{85}$$

$$\frac{25}{2} = \frac{320}{49}$$

$$S_{4BF} = \frac{22 \cdot 97}{132} = 55$$

$$S_{4QM} = \frac{138}{96} = 55$$

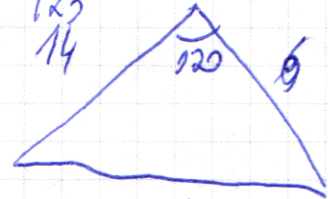


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3,25 \geq \sqrt{6,25 + 21x}$

$x_1 = 7$
 $x_2 = 7$
 $x_3 = 3$
 $x_4 = -3$

$196 = 81 + x^2 + 9x$
 $x^2 + 9x - 115 = 0$
 $x_1 = x^2 = 196 + 81 + 126$



$196 = x^2 + 36 + 6x$
 $x^2 + 6x - 160 = 0$

$\sqrt{6\frac{1}{4}} + 0,75 \geq 3,25$

$$\begin{array}{r} + 196 \\ + 81 \\ 126 \\ \hline + 277 \\ + 126 \\ \hline 403 \end{array}$$

$x = -10$
 $x = 10$

$2x^2 = 50$
 $x = 5$

$196 = 100 + 36 + 60$
 $2 \sin 3$

$g'(x) = 3 \cos 3x \sin 7x + 7 \cos 7x \sin 3x -$
 $- 2 \sin 4x \cos x - 10 \cos 5x \sin 6x$
 $3 \sin 10x + 10 \cos 2x \sin 3x - \sin 2x - 5 \sin 6x$

$x - y = 6$
 $x + y = 14$
 $x = 10$
 $y = 4$

$\frac{16 - 7}{17 - 7} = \frac{10,8}{2}$
 $x = \sqrt{10,8}$

$4 \cos 2x \sin 3x - 2 \sin 10x - \sin 2x$

$\frac{1}{2} (\cos 7x - \cos 2x)$
 $\frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$$\frac{1}{2}(\cos 10x - \cos 4x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 \quad 415$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 10x - \sin^2 x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 10x}{2} + 4$$

$$-2 \sin^2 4x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$2 \sin^2 4x + \sin 2x = 0 \quad \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + 4$$

$$\sin 2x (4 \cos 2x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad \cos x = 1$$

$$\cos x = -\frac{1}{4}$$

$$2 \sin^2 4x - 2 \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin^2 2x$$

$$\frac{1}{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$1 - \sin^2 2x$$

$$\cos^2 2x$$

$$1 - 2 \sin^2 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$2 \sin^2 4x + 2 \sin^2 x = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 0$$

$$1 \quad 3)$$

$$10 \quad 2)$$

$$\frac{14}{15} \quad 12$$

$$\frac{15}{15} \quad 16$$

$$15 \cdot 31$$

$$\sin 2x (4 \cos 2x + 1) = 0$$

$$2 \sin^2 4x - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 4x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x (4 \cos 2x + 1) = 0$$

$$2 \sin^2 2x$$

$$1 - \sin^2 2x$$

$$1 - 2 \sin^2 2x$$

$$\cos^2 2x$$

$$1 - 2 \sin^2 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$2 \sin^2 4x + 2 \sin^2 x = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 0$$

$$1 \quad 3)$$

$$10 \quad 2)$$

$$\frac{14}{15} \quad 12$$

$$\frac{15}{15} \quad 16$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6$$

$$5 \ 2 \ 5 \ 3 \ 5 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5 \ 6 \ 2$$

$$10 \ 6 \ 10 \ 7 \ 10 \ 8 \ 10 \ 9 \ 10 \ 10 \ 11$$

$$15 \ 2 \ 15 \ 3 \ 15 \ 4 \ 15 \ 5 \ 15 \ 6 \ 15 \ 2$$

$$20 \ 2 \ 20 \ 3 \ 20 \ 4 \ 20 \ 5 \ 20 \ 6 \ 20 \ 3$$

| | | | | | | | | | | | |
|----|---|----|---|----|----|----|---|----|----|----|---|
| 10 | 2 | 8 | 9 | 11 | 12 | | | | | | |
| 5 | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 2 | | | |
| 10 | 6 | 10 | 7 | 10 | 8 | 10 | 9 | 10 | 10 | 11 | |
| 15 | 2 | 15 | 3 | 15 | 4 | 15 | 5 | 15 | 6 | 15 | 2 |
| 20 | 2 | 20 | 3 | 20 | 4 | 20 | 5 | 20 | 6 | 20 | 3 |

$$\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + 4$$

$$\frac{1}{2}(2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1) + 4 \quad 180$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 \right) \quad 225$$

$$2 \sin^2 4x - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 4x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x (4 \cos 2x + 1) = 0$$

$$2 \sin^2 2x$$

$$1 - \sin^2 2x$$

$$1 - 2 \sin^2 2x$$

$$\cos^2 2x$$

$$1 - 2 \sin^2 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$2 \sin^2 4x + 2 \sin^2 x = 0$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin 2x = 0$$

$$1 \quad 3)$$

$$10 \quad 2)$$

$$\frac{14}{15} \quad 12$$

$$\frac{15}{15} \quad 16$$

$$6 - 45 \text{ at } 1 \quad 3)$$

$$8 - 9) \text{ at } 1 \quad 3)$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{6} \quad 1 + 3)$$

$$6 - 135 \text{ at } 1 \quad 3)$$

$$6 \ 180 \ 450 \ 465$$