

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

2-005

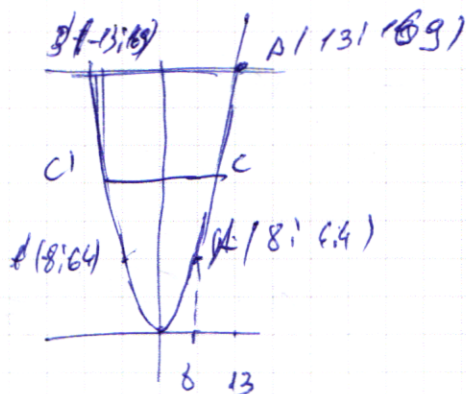
Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



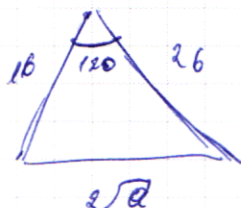
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)



$$\begin{aligned}
 BB' &= 26 \\
 h' &= 16 \\
 CC' &= 2\sqrt{a}
 \end{aligned}$$

1)

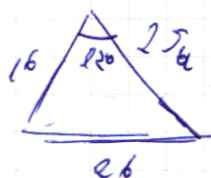


$$4a^2 = 256 + 676 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$4a^2 = \frac{256 + 676 + 416}{4} = 337$$

$$a = \sqrt{337} \quad a = 337$$

2)



$$676 = 4a^2 + 256 + 2\sqrt{a} \cdot 16$$

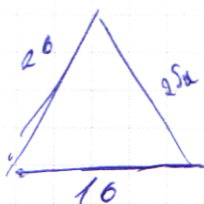
$$100 = a + 8\sqrt{a}$$

$$D = 64 + 400 = 464$$

$$\sqrt{a} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{29}}{2} = 4\sqrt{29} - 8$$

$$a = (4\sqrt{29} - 8)^2$$

3)



$$-4a^2 = 4a + 25\sqrt{a} + 16$$

$$a < 0$$

$\emptyset$

$$2) \quad x > -5 \quad x+5 > 0$$

если

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$$

$$x+3 > 1 + 2x + x^2$$

$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \end{aligned} \quad x \in (-2; 1)$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$x \geq -\frac{5}{2} \quad 4x^2 + 25 + 20x \geq x+3$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

или

$$x \in \left( -\infty; -\frac{20 + \sqrt{165}}{8} \right) \cup \left( -\frac{20 - \sqrt{165}}{8}; \infty \right)$$

$$x \in \left( \left[ -\frac{20 - \sqrt{165}}{8} \right]; 1 \right)$$

$$x \in \left( \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; 1 \right)$$

если

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{x+3} - x < 1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$$

$$x+3 > x^2$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

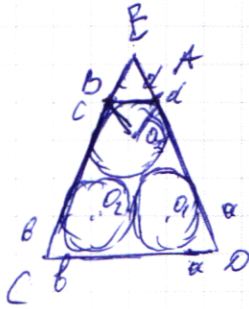
$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x \in \left( \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)$$

$$x \in \left( -\frac{20 + \sqrt{165}}{8}; -\frac{20 - \sqrt{165}}{8} \right)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④



$$a + b + c + d + 2z + 2z - a - b - c - d - 2z = 40$$

$$z = 5$$

$$\Delta C E d \sim \Delta O_3 O_2 O_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} O_2 O_1 \parallel CD \\ O_1 O_3 \parallel ED \\ O_2 O_3 \parallel EC \end{array} \right.$$

$$CE = EO_2 = CO_1$$

③

$$n = t_{18}^4 - 3 t_{17}^3$$

$$\textcircled{1} \quad y(x) = \sin^5 x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$y(x) = \sin(7x-2x) \sin(7x+2x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \sin^2 7x \cos^2 2x - \sin^2 2x \cos^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= -\sin^2 7x \sin^2 2x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= -\sin^2 7x (\sin^2 2x + 1) - \cos^2 x - 3$$

$\textcircled{2}$

$$a \quad | \quad a+2 \quad | \quad a+3 \quad | \quad a+4$$

$$a+6 \quad | \quad a+7 \quad | \quad a+9 \quad | \quad a+10$$

$$a+7 \quad | \quad a+9 \quad | \quad a+10 \quad | \quad a+11$$

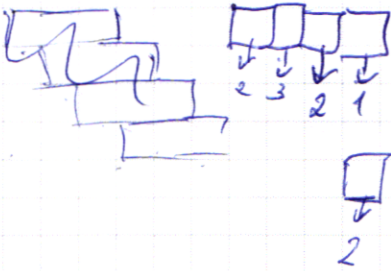
$$a+10 \quad | \quad a+10 \quad | \quad a+10 \quad | \quad a+10 \quad | \quad a_{\text{числ}} = 1$$

$$4a+10 + 4a+16 + 3+4 + 4a + 4a+10 =$$

$$= 26 + 16 + 3 + 4 + 4a = 916$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cdot 3^{12} - 16 \cdot 3^{13}$$



5 5 5 9 5 9 0 9 5

$$\begin{array}{r} 016 \\ 16 \\ \hline 16 \\ 156 \\ \hline 16 \\ 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 152 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 26 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \\ 676 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1348 \mid 4 \\ \hline 22 \quad 337 \mid \\ \hline 14 \quad \quad \quad \mid \\ 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 22 \\ \hline 64 \\ 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ -20 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 469 \mid 4 \\ \hline 116 \quad 16 \mid 4 \\ \hline 8 \quad \quad \quad \mid 29 \\ \hline 38 \end{array}$$

$a$                        $a+2$                        $a+3$                        $a+4$   
 $a+36$                        $a+3788$                        $a+39$                        $a+40$   
 ~~$a+71$~~                        ~~$a+74$~~                        ~~$a+76$~~                        ~~$a+77$~~   
 $a+75$                        $a+76$                        $a+77$                        $a+78$   
 $a+102$                        $a+103$                        $a+104$                        $a+105$

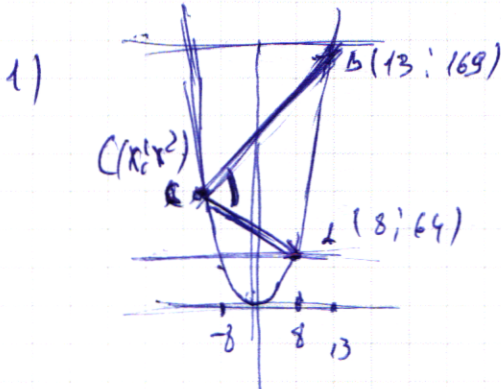
$$a_{\min} = 2$$

$$26 + 162 + 544 + 444$$

$$\begin{array}{r}
 188 \quad 728 \\
 188 \\
 \hline
 916
 \end{array}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$C(x, x^2)$$

$$A(8, 64)$$

$$\vec{CB} = \{13-x; 169-x^2\}$$

$$\vec{CA} = \{8-x; 64-x^2\}$$

$$(8-x)(13-x) + (169-x^2)(64-x^2) = -\frac{1}{2}$$

$$(8-x)(13-x)(1 + (13+x)(8+x)) = -\frac{1}{2}$$

$$(8-x)(13-x)(1 + 104 + 21x + x^2) = -\frac{1}{2}$$

обозначим  $x^2 - 21x + 104 = a$

$$a \cdot (a+1) = -\frac{1}{2}$$

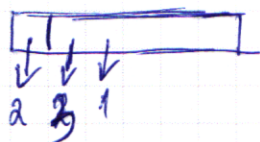
$$2a(a+1) + 1 = 0$$

$$2a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4$$

нет корней

3)



$n = 2 \cdot 3^{16}$

$\frac{a_4}{a_2} = 35$

$\frac{a_3}{a_2} = 35$

$\frac{a_4}{a_2} = 70$

$\frac{a_2}{a_1} = 35$

$\frac{a_4}{a_1} = 105$

$\frac{a_3}{a_1} = 70$

5)

$\log_{\sqrt{x+3}}(x+5) \geq 1$

$a_1 + a_2, a_3 + a_4$

$\sqrt{x+3} - x \geq 0 \quad x \geq -3$

$\sqrt{x+3} \geq x$

$x+3 \geq x^2$

$x^2 - x - 3 > 0$

$D = 1 + 12 = 13$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

Решим

$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ x+5 > \sqrt{x+3} - x \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x+3} > 1+x \\ 2x+5 > \sqrt{x+3} \end{cases}$

~~$x+3 > (1+x)^2$~~

$x+3 > 1+2x+x^2$

$4x^2 + 25 + 20x > x+3$

~~$x^2 + x - 2 < 0$~~

$x^2 + x - 2 < 0$

$4x^2 + 19x + 22 > 0$

$D = 1 + 8 = 9$

~~$x = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad x \in (-2, 1)$~~

$D = 19 \cdot 19 - 4 \cdot 22 = 165$

$x \in \left( \frac{-19 - \sqrt{165}}{8}, \frac{-19 + \sqrt{165}}{8} \right) \cup (1, \infty)$

~~$19 \pm 19$~~

~~19~~

~~175~~

~~19~~

~~$-369 - 2 \sin^2 2x \sin^2 7x - 50a^2 7x - \cos^2 x - 3$~~

~~$-192 - 4 \cos 2x \sin^2 2x - 28 \sin^2 2x \cos 2x$~~

~~165~~

~~$-4 \cos 2x - \sin 2x$~~

$x \in \left( -\frac{20 - \sqrt{165}}{8}, 1 \right)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)

$$g(x) = 5 \sin^2 x \sin 9x - 5 \sin^2 7x - (\cos^2 x - 3)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\frac{\cos 10x - \cos 18x}{2}$$

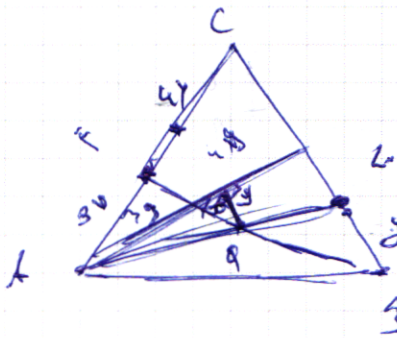
$$\frac{x+y}{2} = 18$$

$$x - y = 10$$

$$x = 14$$

$$y = 4$$

$$\sin 5(x+y) = \sin 5 \cdot 18 \cos 4x + \sin 4x \sin 90$$



$$\sin(x-2x) \sin(x+2x) =$$

$$= \sin^2 x \cos^2 2x - \sin^2 2x \cos^2 x - \sin^2 7x - (\cos^2 x - 3)$$

$$= \sin^2 2x (\cos^2 2x - 1) - 4 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + 1) - 3$$

$$= 4 \sin^2 2x \sin^2 x - 4 \cos^2 x - 3 \sin^2 x$$

$$= 4 \sin^2 2x \sin^2 x + 4 \sin^2 2x \cos^2 x - 4 \sin^2 2x (\sin^2 x + \cos^2 x) =$$

$$- 4 \sin^2 2x - (\cos^2 x - 3)$$

$$= -4 \sin^2 2x \sin^2 x + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$- 4 \sin^2 2x (4 \sin^2 2x + 1) - \cos^2 x - 3$$

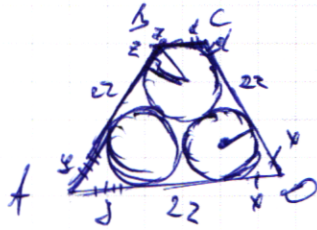
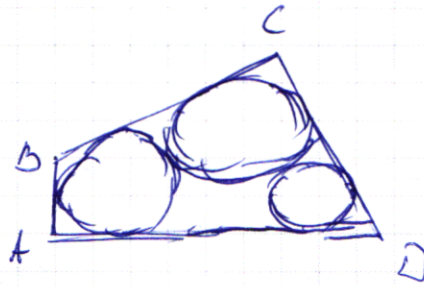
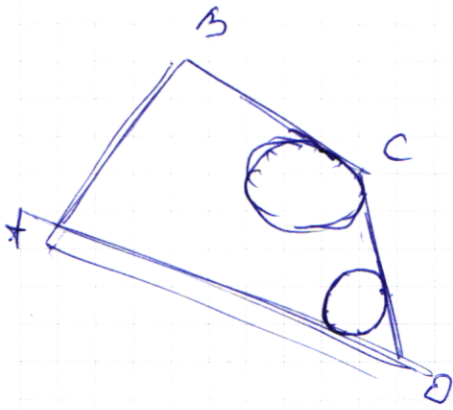
$$- 4 \cos^2 x (4 \sin^2 2x \sin^2 x + 1) - 3 \sin^2 x$$

$$- 4 \sin^2 2x \cos^2 x \sin^2 2x - 4 \sin^2 2x - (\cos^2 x - 3)$$

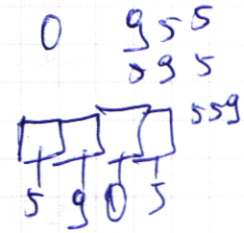
$$- 4 \sin^2 2x (4 \sin^2 2x + 1) - \cos^2 x - 3$$

$$g'(x) = -14 \cos 7x + 8 \cos 5x - 2 \sin x = 0$$

$$= -4 \sin^2 2x (2(\sin 2x \cos x - \sin x \cos 2x)^2 + 1)$$



2



2. ~~1000~~  
7

A

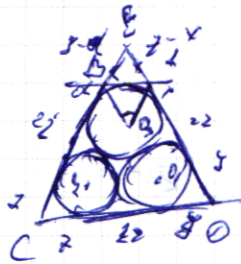
~~18~~<sup>4</sup> - 6

$$\begin{aligned}
 & \cancel{x + y + z + z + z + z + z} \\
 & \cancel{x + y + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z}
 \end{aligned}$$

$$\underline{x + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z} - \underline{y - z - z - z - z - z - z - z - z - z}$$

$$-2z = 10$$

B → A



$$6z = z \cdot 6$$

$$x^2 = z \cdot 6$$

$$(z + 6)(z + 6) = 42$$

$$x + y + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z + z = 10$$

$$2z = 10$$

$$z = 5$$

Handwritten note

9999509

