

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

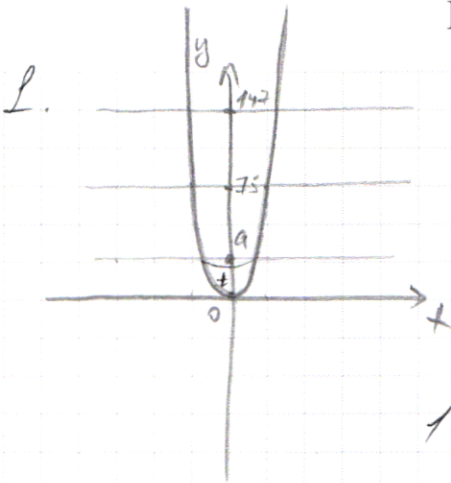
ШИФР

2-006

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y = 3x^2$$

$$y = 147 \quad 147 = 3x^2 \quad x^2 = 49 \quad x = 7$$

$$y = 75 \quad 75 = 3x^2 \quad x^2 = 25 \quad x = 5$$

$$y = a \quad a = 3x^2 \quad x^2 = \frac{a}{3}$$

$$14^2 = 10^2 + t^2 \quad t^2 = 96 \quad t = 4\sqrt{6}$$

$$4\sqrt{6} = 3x^2 \quad x = \sqrt{\frac{4\sqrt{6}}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$y = 3 \cdot 24 = 72 \quad \text{Ответ: } 72$$

3. x - число листов

а. л. - 26 марок - $(x-1)$ лист

б. л. - 21 марка - x лист.

$$21x + 26(x-1) = 400$$

$$21x + 26x - 26 = 400$$

$$x(21+26) = 426$$

$$x = \frac{426}{47} = 15 \text{ лист} + 21 \text{ марка}$$

а. л. - 21 марка - 16 лист

всего будет 16 лист

$$16 - 1 = 15 \text{ лист} (26 \text{ мар. на лист})$$

$$15 \cdot 26 = 390 \text{ марок}$$

Ответ: 390 марок.

$$4) |ax - 3a| \leq \sqrt{x-1} \quad x=4$$

$$|4a - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$|a| \leq \sqrt{x-1}$$

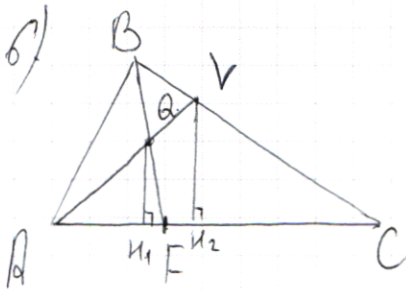
$$\begin{cases} a^2 \leq x-1 \\ a^2 \geq x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \leq \sqrt{x-1} \\ a \geq -\sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a^2 = x-1$$

$$a^2 = 4-1 \quad a^2 = 3$$

$$a = \sqrt{3}$$



$$AF = 3x$$

$$FC = 5x$$

$$BH_1 = 12$$

$$CH_2 = ?$$

$$\frac{S_{BAC}}{S_{BAE}} = \frac{4}{25}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

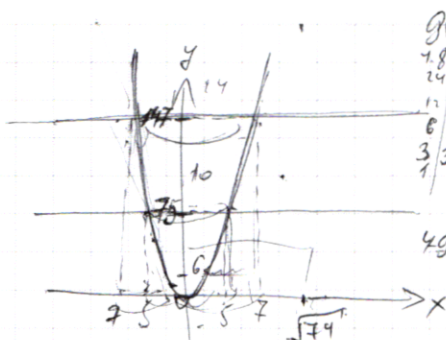


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad y_0 = -\frac{d}{4a}$$



$$\begin{array}{r} 96 \overline{) 2} \\ 18 \\ \underline{24} \\ 11 \\ \underline{62} \\ 33 \end{array}$$

$$y = 3x^2 \quad y = 3 \cdot 7.5^2 = 147$$

$$x_1 = \pm 5$$

$$x_2 = \pm 7$$

$$x_3 = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$

$$\begin{array}{r} 74 \overline{) 2} \\ 14 \\ \underline{37} \\ 37 \end{array}$$

$$\sqrt{24}$$

$$49 - 25 = 24$$

$$a = 3x^2 \quad 7.5 \cdot 3 = a \quad a = 22.2$$

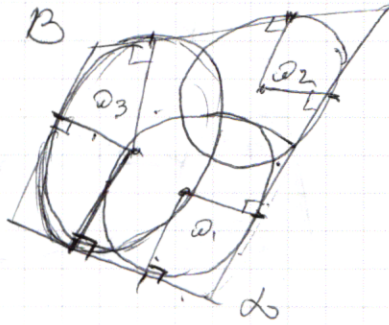
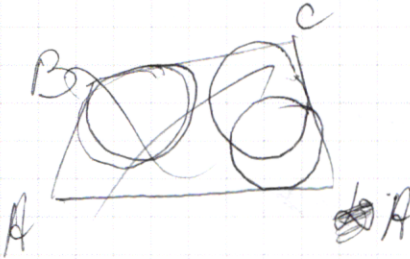
$$24 \cdot 3 = 72$$

$$a^2 = 96 \quad a = 4\sqrt{6}$$

$$4\sqrt{6} = 3x^2$$

$$x^2 = \sqrt{\frac{4\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$196 = 100 + a^2$$



$$196 = 100 +$$

$$y = 3 \cdot 24 = 72$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 21 \\ \hline 47 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \overline{) 17} \\ 47 \\ \underline{230} \\ 188 \\ \underline{188} \\ 0 \end{array}$$

$$AB + BC - AC - CD = 30$$

крп: 1 рпк: - 22 марка - чр члн.

крп: 1 рпк: - 26 марка - 1 рпк члн

1 рпк: - 21 марка - 700 марка.

269 - 21 марка.

159 - 10м. "

159 - 11м.

$$\begin{array}{r} 700 \overline{) 21} \\ 63 \\ \underline{70} \\ 70 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \overline{) 20} \\ 35 \\ \underline{70} \\ 0 \end{array}$$

$$700 - 21 = 679$$

$$\begin{array}{r} 700 \overline{) 2} \\ 350 \\ \underline{350} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \overline{) 21} \\ 63 \\ \underline{70} \\ 63 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

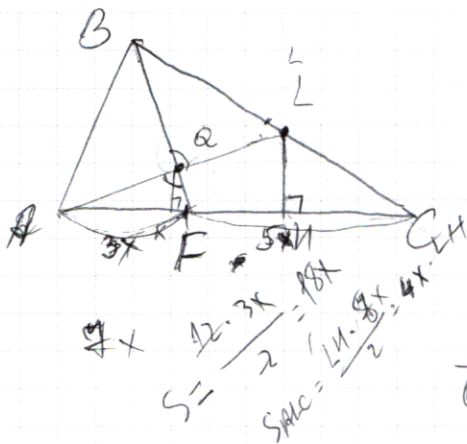
$$33 \cdot 21$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ - 21 \\ \hline 66 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ 693 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ - 693 \\ \hline 67 \end{array}$$

37 рпк.



$$\frac{S_{ABQ}}{S_{AQC}} = \frac{6x^2}{10x^2} = \frac{3}{5} \neq \frac{BQ}{QC} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$S_{ABQ} = \frac{1}{2} \cdot BQ \cdot AL \cdot \sin \angle BQL$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AL \cdot \sin \angle B$$

13. 2 5 7

$a(x-3)$

$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$ax - 3a \leq +\sqrt{x-1}$$

$$ax - 3a \geq -\sqrt{x-1}$$

$$ax - 3a \leq \sqrt{x-1}$$

$$ax - 3a \geq -\sqrt{x-1} \quad x=4$$

$$a^2(x-3)^2 \leq x-1$$

$$a^2(x-3)^2 \geq +\sqrt{x-1}$$

$$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 \leq x-1$$

210 м.
400 м.

26
21

~~210~~

210
-26
184

400
+26
426

75
75
+378
5035
7285
-630
6655

26

21
30

630

30 630
21
26
30
880

* 147
147
1029
+588
147
21869
-5625
16214

$$21609 = 2 \cdot 5625 + a^2$$

$$a^2 =$$

$$\sqrt{4a - 3a} \leq \sqrt{x-1}$$

$$|a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$a^2 \leq x-1$$

$$a^2 = x-1$$

$$a^2 \geq x-1$$

$$a^2 = 3 \quad a = \sqrt{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$400 - 21 = 679$$

$$26 + 21 = 47$$

$$400 + 26 = 426$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 182 \\ 4 \end{array}$$

$$21 \cdot x + 26 \cdot (x-1) = 400$$

$$21x + 26x - 26 = 400$$

$$x(21 + 26) = 426$$

$$x = \frac{426}{47}$$

15р. - 21м.

15р. + 21м.

$$\begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 - 21 \\ 15 - 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 21 \\ \hline 16 \\ 32 \\ \hline 336 \end{array}$$

16р.рр.

$$16 - 1 = 15р.$$

$$15 \cdot 26 = 390 \text{ марка}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 26 \\ \hline 15 \\ 30 \\ \hline 390 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 390 \\ + 336 \\ \hline 726 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 22 \\ \hline 16 \\ 22 \\ \hline 154 \\ 16 \end{array}$$

$$|ax-3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$|a(x-3)| \leq \sqrt{x-1}$$

$$\begin{cases} a(x-3) \leq \sqrt{x-1} \\ a(x-3) \geq -\sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$a^2(x-3)^2 = x-1$$

$$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 = x-1$$

$$a^2(x^2+9) = x-1 + 6a^2x$$

$$a^2(x^2+9) = x(6a^2+1) - 1$$