

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

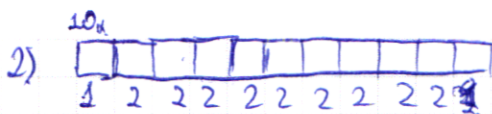
ШИФР

~~2-006~~ 2-007

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры “1”, “5” и “6” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно десять, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$ является отрезок длины 1?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.
7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



десять 5 рядов можно поставить в 51. рядках. выписать
остаток. ~~20 тысяч~~. все 10-е можно писать все числа, ~~о в ряд~~
~~только~~ ~~одна~~, ~~поэтому~~ ~~каждая~~ цифра вырезается
хотя бы один раз и все остальные не могут быть один
и тем же число.

$$11 (2^{10} - 2)$$

ответ $11 (2^{10} - 2)$

5) x - человек t - время 2 года y y - производится
 $x+2$ (зел) $t+1$ в.р. 15 года y
 $x+6$ (зелов) $t+1$ 10 года y .

$$28xt = 15(t+1)(x+2) = 10(x+6)(t+1)$$

$$\frac{3 \cdot 15 (t+1) (x+2)}{10 (x+6) (t+1)} = 1$$

$$3x+6 = 2x+12$$

$$x = 6$$

ответ 6



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 3x^2 - 4x + 2$$

~~3-4+2~~

$$\begin{aligned} 3-4+2 \\ 3+4+2 \\ 12-8+2 \end{aligned}$$

$$y = 17$$

x	y
0	2
1	1
2	6

$$y = 1$$

$$y = a$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$y_0 = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 2$$

$$y_0 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 2 = \frac{4-8+6}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y = 3 \cdot \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 2$$

$$x - t \rightarrow 2 \text{ кор.} = \frac{4-8+6}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x+2 \rightarrow t+1 \rightarrow 15 \text{ кор.}$$

$$x+6 \rightarrow t+2 \rightarrow 10 \text{ кор.}$$

$$x = x \cdot 21 \cdot 6$$

$$t = (x+2) \cdot 15 \cdot (t+1)$$

$$t = (x+6) \cdot (t+2) \cdot 10$$

$$21xt = x$$

$$15(xt + x + 2t + 2) = x$$

$$(x(t+2) + 6t + 12) \cdot 10 = x$$

$$21xt = 15xt + 15x + 30t + 30 = 10xt + 90x + 60t + 30$$

$$\begin{cases} 21xt = 15xt + 15x + 30t + 30 \\ 15xt + 15x + 30t + 30 = 10xt + 90x + 60t + 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6xt - 15x + 30t - 30 = 0 \\ 5xt - 5x - 30t - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6xt - 15x - 30t - 30 = 0 \\ -xt - x = 6t - 18 = 0 \end{cases}$$

$$-xt - x = 6t - 18 = 0$$

$$xt = x + 6t + 18$$

$$6(x + 6t + 18) - 15x - 30t - 30 = 0$$

$$6x + 36t + 108 - 15x - 30t - 30 = 0$$

$$-9x - 56t + 78 = 0$$

$$-9x + 6t + 78 = 0$$

$$-3x + 2t + 26 = 0$$

$$\frac{3x-36}{2} \cdot x - x - \frac{3}{6} \cdot \frac{3x-36}{4} - 18 = 0$$

$$2x(3x-36) - 2x - 6(3x-36) - 36 = 0$$

$$6x^2 - 72x - 2x - 18x + 216 - 36 = 0$$

$$6x^2 - 92x + 180 = 0$$

$$3x^2 - 46x + 90 = 0$$

$$2t = 3x - 26$$

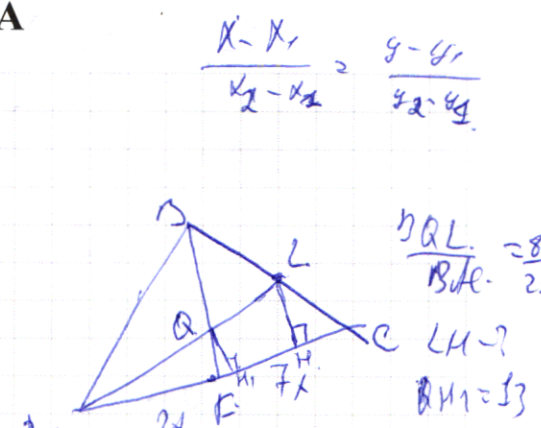
$$D = 2116 - 1080 = 1036 = 32^2$$

$$x = \frac{3x-26}{2}$$

2	1	1	6
-	1	0	30
-	1	0	30

$$\frac{12}{1080}$$

$$1036$$



$$\frac{AL}{BL} = \frac{8}{24}$$

$$LK = ?$$

$$BK = 13$$

$$\frac{7+3}{6} = \frac{26}{12}$$

$$\frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{9+6}{12} = \frac{15}{12}$$

x-сызық т. кезіндегі g-ызық 21ер
 x+2 сызық t+1 кез g-ызық 15ер
 x+6 t+2 кез g-ызық 10ер

~~x+2~~

~~x+2~~ 21 = (x+2)(t+1) 15 = (x+6)(t+2)

$$\frac{(x+2)(t+1) 15}{(x+6)(t+2) 10} = 1$$

$$21xt = 15xt + 15x + 30t + 30$$

$$6xt - 15x - 30t - 30 = 0$$

$$2xt - 5x - 10t - 10 = 0$$

$$3(xt + x + 2t + 1) = (xt + 2x + 6t + 12)$$

$$3xt + 3x + 6t + 3 = 2xt + 4x + 12t + 12$$

$$(ax - a)^2 \leq x - 2$$

$$\begin{cases} xt - x - 6t - 2 = 0 \\ 2xt - x - 10t - 10 = 0 \end{cases} \quad \sqrt{t} = x + 6t + 12$$

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq x - 2$$

$$a^2(x^2 - 2x + 1) \leq x - 2$$

$$|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$$

$$|a(x - 1)| \leq \sqrt{x - 2}$$

$$a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 - 2 \leq 0$$

$$a^2(x^2 - 4x + 4) - 2 \leq 0$$

$$a^2(x^2 - 4x + 4) < 2$$

$$2x + 12t + 12 - x - 10t - 10 = 0$$

$$x + 2t + 32 = 0 \quad t = \frac{-x - 32}{2}$$

$$x = 8 - 32 - 2t$$

$$x \cdot \left(\frac{-x - 32}{2} \right) - x - \frac{3}{8} \cdot \frac{-x - 32}{2} + 21 = 0$$

$$\frac{-x^2 - 32x}{2} - x - 3(-x - 32) - 21 = 0$$

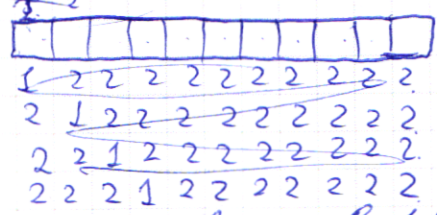
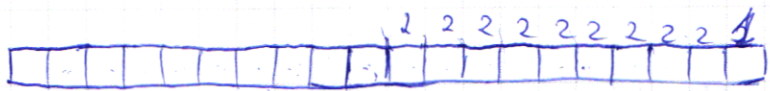
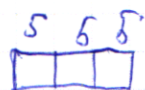
$$-x^2 - 32x - 2x + 6x + 192 - 21 = 0$$

$$-x^2 - 28x + 150 = 0$$

$$x^2 + 28x - 150 = 0$$

$$D = 28^2 + 4 \cdot 150$$

$$13 \cdot 2^{12}$$



$$11 \cdot 2^{10}$$

Яснота. 5 рәуиш мөмкин қоялырға 11 2-ләр
 әһәт. рәзгәһәк вершәһәк 11 · 2¹⁰

28
x28

784
56

1384

x150

600

32
x32

64
+96

1024

38
x38

304
+914

1444



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

~~2-006~~ 2-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

~~2-006~~ 2-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

~~2-006~~ 2-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)