

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

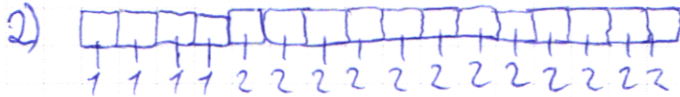
1-008

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2 - 5x + 1$  пересекает прямые  $y = -1$ ,  $y = 4$  и  $y = a$ , отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 24$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$  является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 7 : 3$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $7 : 36$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 30]$ ,  $[31; 60]$ ,  $[61; 90]$ ,  $[91; 120]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



в первом 4 только «9»

в остальных или «3» или «4»

и (-2) потому что есть вариант  
когда все 3 или все 2 и есть  
таких 13 возможностей

Ответ  $(2^{12} - 2) 13$

5) обозначим  
производительность -  $x$   
число рабочих -  $n$   
время каменного дня -  $t$

$$21 \times (n+2)(t+1) = 28 \times n \times t$$

$$15 \times (n+6)(t+1) = 28 \times n \times t$$

$$\frac{21(n+2)}{15(n+6)} = 1$$

$$21n + 42 = 15n + 90$$

$$21n - 15n = 90 - 42$$

$$6n = 48$$

$$n = 8$$

Ответ 8



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$tX = 6t + 3X + 6$$

$$13 tX = 90t + 15X + 9$$

$$48t + 39X + 78 = 9t + 15X + 9$$

$$69t + 24X + 69 = 0$$

$$23t + 48X + 23 = 0$$

$$23(t-1) + 48X = 0$$

$$48X = 23(1-t)$$

$$X = \frac{23}{48}(1-t)$$

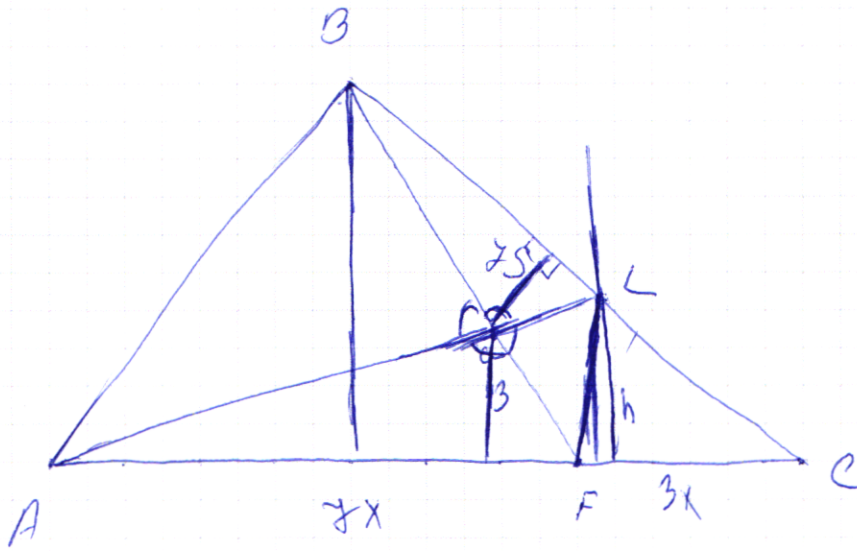
$$\frac{23t}{8}(1-t) = 6t + \frac{69}{8}(1-t) + 6$$

$$\frac{23t - 23t^2}{8} = 6t + \frac{69 - 69t}{8} + 6$$

$$23t - 23t^2 = 48t + 69 - 69t + 48$$

$$23t^2 - 92t + 48t + 48 = 0$$

$$23t^2 - 44t + 48 = 0$$



365

$$S_{AQB} = \frac{2x \cdot 3}{2}$$

$$365 = \frac{10 \cdot 11}{2}$$

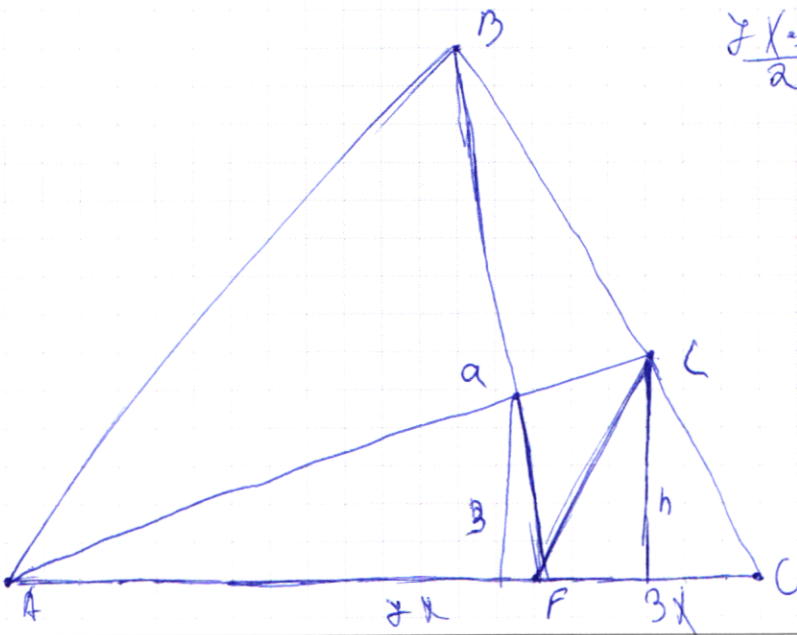
$$S_{FLC} = \frac{3x \cdot h}{2}$$

$$\frac{10x \cdot 11}{2} = 36$$

$$x \cdot 11 = 36$$

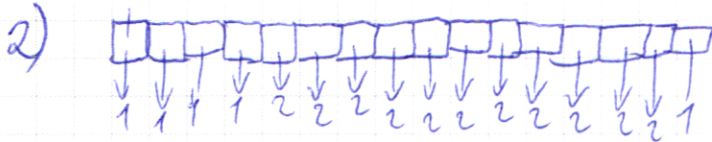
$$\frac{3x \cdot h}{2} = \frac{36}{3}$$

$$\frac{2x \cdot 3 + 3x \cdot h}{2} = \frac{10x \cdot 11}{2}$$



$$\frac{2x \cdot 3}{2} = 9$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



в первом 4 кубике можно поставить  
только «3» в следующих «3, 4»

ответ  $2^{11}$

в последнем или «3» или «4»

$$x^2 \frac{1}{28nt}$$

$$28 \cdot 1 \cdot n \cdot x$$

$$21(n+2) \cdot x \cdot 2$$

$$15 \cdot 3 \cdot (n+6)$$

$$12 \cdot \frac{14}{28nk} \cdot \frac{21(n+2) \cdot x \cdot 2}{3}$$

$$3n+6 = 22n$$

$$n = 26$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

$x \quad t$

$$286 \cdot x = 21(t+1)(x+2) = 15(t+1)(x+6)$$

$$286x = 21(t+1)(x+2)$$

$$286x = 21(6x+2t+x+2)$$

$$286x = 216x + 42t + 21x + 42$$

$$76x + 42t + 21x + 42$$

$$t = 6t + 3x + 6$$

$$286x = 15(t+1)(x+6)$$

$$286x = 15(6x+6t+x+6)$$

$$286x = 156x + 90t + 15x + 90$$

$$136x = 90t + 15x + 90$$

$$\begin{cases} t = 6t + 3x + 6 \\ 136x = 90t + 15x + 90 \end{cases}$$

$$136x = 90t + 15x + 90$$

$$13 \cdot \frac{3x+6}{x-6} \cdot x = 90 \cdot \frac{3x+6}{x-6} + 15x + 90$$

$$\frac{39x^2 + 78x}{x-6} = \frac{270x + 540}{x-6} + 15x + 90$$

$$\frac{39x^2 + 78x - 240x + 540}{x-6} = 15x + 90$$

$$t = 6t + 3x + 6$$

$$t(x-6) = 3x+6$$

$$t = \frac{3x+6}{x-6}$$

$$6 \cdot 13 = 60 + 18$$

$$\frac{39x^2 - 192x - 540}{x-6} = 15x + 90$$

$$39x^2 - 192x - 540 = 15x^2 + 90x + 9x - 54$$

$$39x^2 - 192x - 540 = 15x^2 - 81x - 54$$

$$24x^2 - 111x - 486 = 0$$

$$8x^2 - 37x - 156 = 0$$

$$D = 37^2 + 4 \cdot 8 \cdot 156$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ 48 \\ \hline 17129 \end{array} \quad \begin{array}{r} 77 \\ 78 \\ \hline 54439 \end{array}$$

$$11359 + 468312$$

$$\begin{array}{r} 468 \ 312 \\ 11 \ 359 \\ \hline 479 \ 671 \end{array} \quad \begin{array}{r} 91 \\ 91 \\ \hline 81991 \end{array}$$

$$468312$$

$$\begin{array}{r} 107 \\ 107 \\ \hline 214 \end{array}$$

$$107000749$$

$$\begin{array}{r} 87 \ 99 \\ 87 \ 99 \\ \hline 9 \ 98 \end{array}$$

$$x \cdot \frac{1}{t}$$

$$x + 2$$

$$x + 6$$

X

n  
t

$$x \cdot \frac{1}{t}$$

$$t = \frac{1}{5} \cdot x$$

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{28}$$

$$28x = t$$

$$28xnt = 1$$

$$21x \cdot (n+2) \cdot (t+1) = 28xnt$$

$$15x(n+6)(t+2) = 28xnt$$

$$\frac{21(n+2)}{15(n+6)} = 21$$

$$21n + 42 = 15n + 90$$

$$21n - 15n = 90 - 42$$

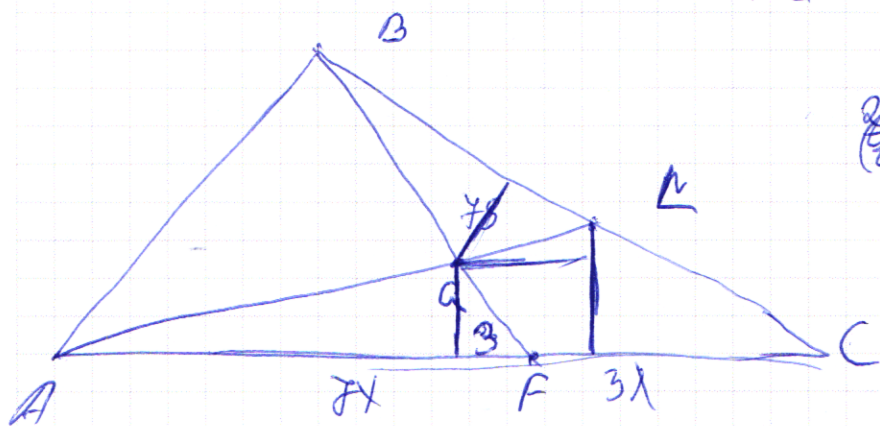
$$6n = 48$$

$$n = 8$$

Bl.

$$\frac{7(n+2)}{5}$$

$\frac{21}{5}$



365

$$7nt + 14t + 7n + 14 = 28n5nt + 30t + 60 + 10n$$

$$\frac{7(n+2)(t+1)}{5(n+6)(t+2)} = 1$$

$$\frac{7}{5} = \frac{(n+6)(t+2)}{(n+2)(t+1)}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{nt + 6t + n + 2n}{nt + 2t + n + 2} = \frac{n(t+2) + 6(t+2)}{nt + 2t + n + 2}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$k = \frac{1}{nb}$$

28

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \underline{\underline{4, 1}}$$

$$2x^2 - 5x$$

$$28xnt = z_1$$

$$21x(n+2)(t+1) = z_1$$

$$15x(n+6)(t+2) = z_1$$

$$\frac{28}{21} = \frac{nt}{(n+2)(t+1)}$$

$$\frac{3nt}{4} = (n+2)(t+1)$$

$$21x \cdot \frac{3nt}{4} = \frac{63xnt}{4}$$

$$\frac{28xnt}{21x(n+2)(t+1)}$$

$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$\frac{4nt}{3}$$

$$(ax - 2a)^2 \leq x - 1$$

$$a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 - 2 \leq 0$$

$$x \leq 3 \quad a$$

$$(ax^2 - 2a)^2 < 2$$

$$4a^2(1-x) + a^2x^2 - 2 < 0$$

$$x > 0$$

$$a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 - 2 < 0$$

$$a^2(4 - 4x + x^2) < 2$$

$$x - 1 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$4 - 4x + x^2 < 0$$

$$x_1 x_2 = 4$$

$$a^2 < 0 \quad \varnothing$$

$$a^2 > 0 \quad 4 - 4x + x^2 > 0$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)