

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

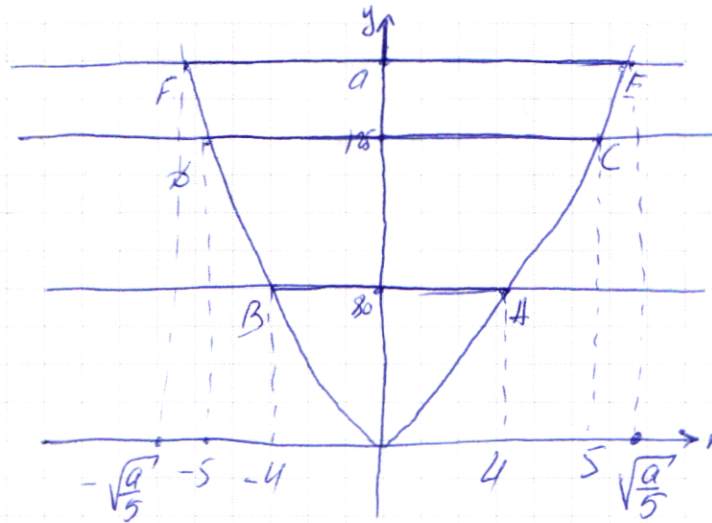
2-009

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$ является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “5” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “3” ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 1 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = 5x^2$
 $y = 125$
 $y = 80$
 $y = a$



предположим.

$y = 80 \cap y = 5x^2 \equiv A, B$

$y = 125 \cap y = 5x^2 \equiv C, D$

$y = a \cap y = 5x^2 \equiv E, F$

Когда $y = 125$, тогда $125 = 5x^2 \quad x = \pm 5$

$y = 80$, тогда $80 = 5x^2 \quad x = \pm 4$

$y = a$, тогда $a = 5x^2 \quad x = \pm \sqrt{\frac{a}{5}}$

$AB = |4| + |-4| = 8$

$CD = |5| + |-5| = 10$

$EF = |\sqrt{\frac{a}{5}}| + |-\sqrt{\frac{a}{5}}| = 2\sqrt{\frac{a}{5}}$

Если a ~~меньше~~ ^{мен} больше 125, тогда гипотенузой станет CD . И по

Пифагору $(2\sqrt{\frac{a}{5}})^2 + 8^2 = 10^2$

$\frac{4a}{5} + 64 = 100$

$\frac{4a}{5} = 36$

$\frac{a}{5} = 9$

$a = 45$

А если a ~~меньше~~ ^{больше} больше 125, тогда

гипотенузой станет EF . И по Пифа-

гору. $8^2 + 10^2 = (2\sqrt{\frac{a}{5}})^2$

$164 = \frac{4a}{5}$

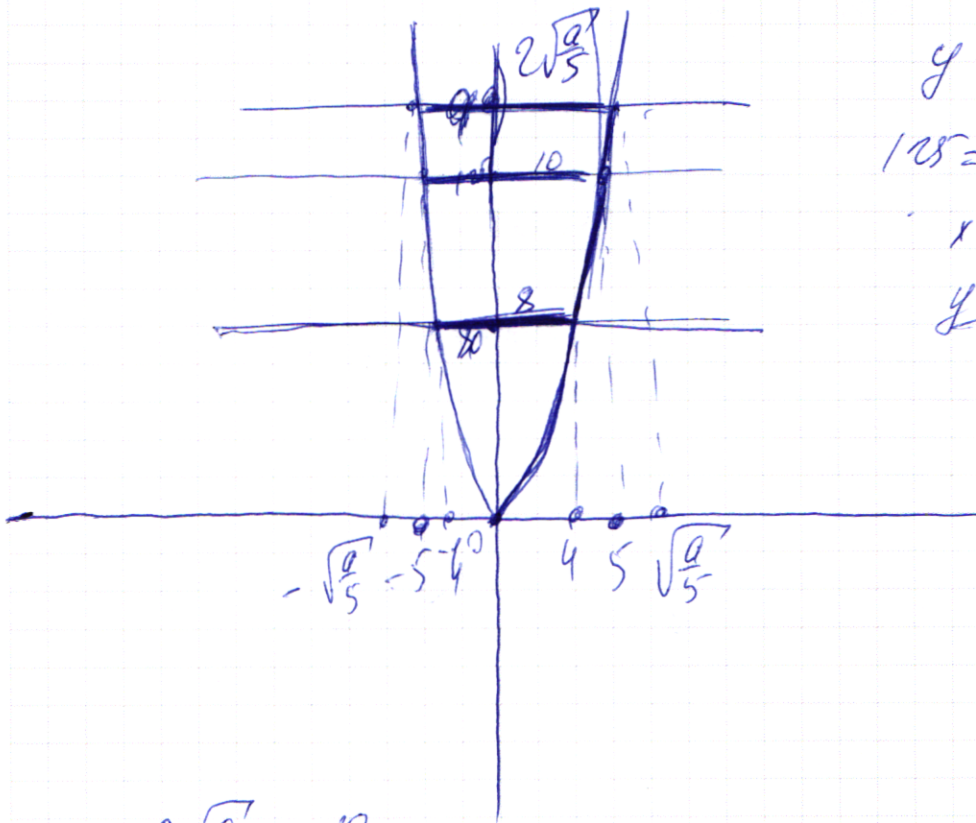
$a = 205$

Ответ. 45 и 205

5) $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} a_{17} a_{18}$
3 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

предположим, что для первой цифры есть 3 варианта ("3", "5", "8"). Так как число "3" ровно шесть раз и подряд, тогда для $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ есть 1 вариант если первая 3. А для остальных 2 варианта ("5" или "8"). И так 18 раз. Получается $3 \cdot 2^{12} \cdot 18 = 3 \cdot 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2^{13}$

Ответ. $3^3 \cdot 2^{13}$



$$y = 5x^2$$

$$125 = 5x^2$$

$$x = \pm 5$$

$$y = 80, 80 = 5x^2$$

$$x = \pm 4$$

$$a = 5x^2$$

$$x^2 = \frac{a}{5}$$

$$x = \sqrt{\frac{a}{5}}$$

$$2\sqrt{\frac{a}{5}} < 18$$

$$\sqrt{\frac{a}{5}} < 9$$

$$\frac{a}{5} < 81$$

$$a < 405$$

$$64 + 100 = 4 \cdot \frac{a}{5}$$

$$5 \cdot 164 = 4a$$

$$5 \cdot 41 = a$$

$$a = 205$$

$$64 + \left(2\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^2 = 100$$

$$64 + 4 \cdot \frac{a}{5} = 100$$

$$64 + \frac{4a}{5} = 100$$

$$\frac{4a}{5} = 36$$

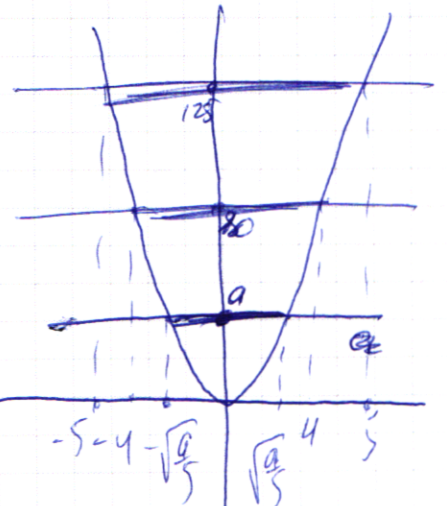
$$4a = \frac{a}{5} = 9$$

$$a = 45$$

$$a = 5x^2$$

$$x^2 = \frac{a}{5}$$

$$x = \sqrt{\frac{a}{5}}$$



$$2\sqrt{\frac{a}{5}} + 8 \leq 10$$

$$2\sqrt{\frac{a}{5}} \geq 2$$

$$\sqrt{\frac{a}{5}} \geq 1$$

$$\frac{a}{5} \geq 1$$

$$a \geq 5$$

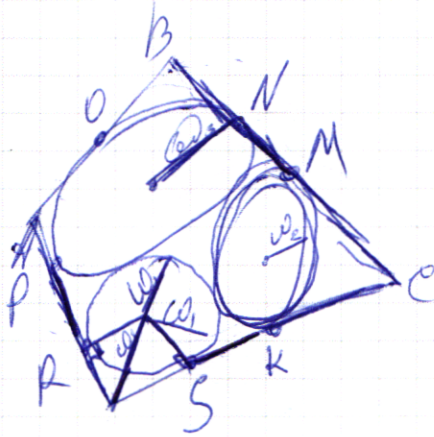
$$\begin{array}{r} 205 \div 5 \\ \times 41 \\ \hline 764 \end{array}$$

$$\left(2\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^2 + 64 = 100$$

$$\frac{4a}{5} = 36$$

$$\frac{a}{5} = 9 \quad a = 45$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AB + BC - AB - CA = 2B$$

$$AB + BC = AP + CB$$

$$AP + CB - AB - CA = 2B$$

$$AS = AR$$

$$AB = AP + PR + RB$$

$$AP = AO$$

$$BC = BN + NM + MC$$

$$BO = ON$$

$$BM = BO + OB$$

$$CK = CM$$

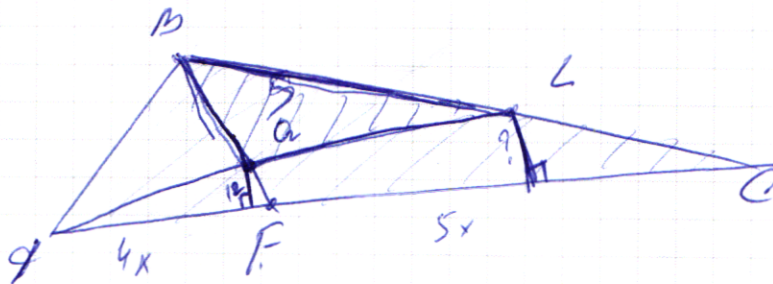
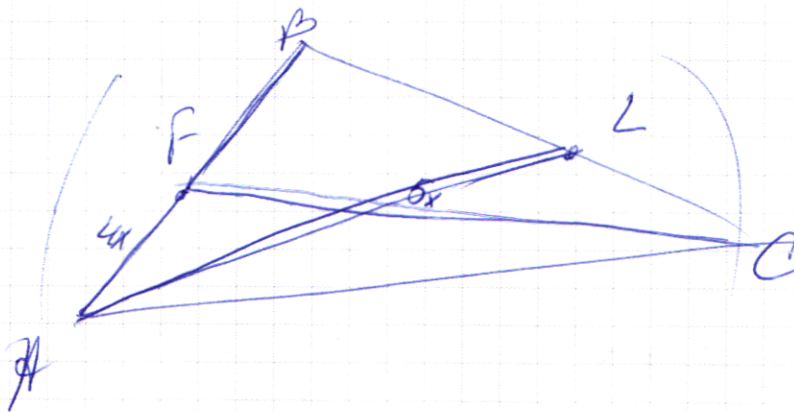
$$CA = CS + SK + KC$$

$$AS - SK - AC = 2B$$

~~$$AP + PR + AR + BN + NM + MC - AP - CB - CK - CM - CA = 2B$$~~

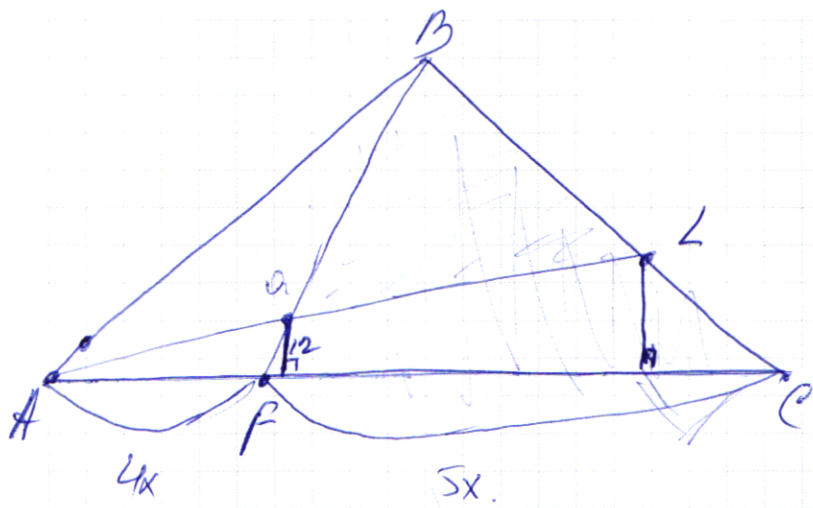
$$PR + NM - SK = 2B$$

$$PR + NM = 2B + SK$$



$$S_{BFL} = S$$

$$S_{ABC} = 2SS$$



$$\begin{array}{r}
 900 \overline{) 22} \\
 \underline{80} \\
 20
 \end{array}
 \quad 900/2$$

$$x + y + 22y = 900$$

$$y(x + 22) = 900$$

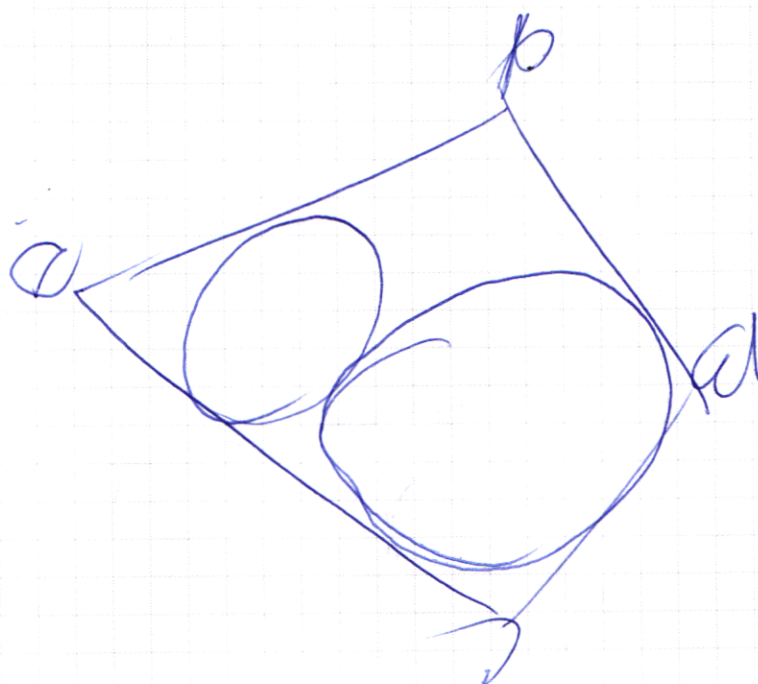
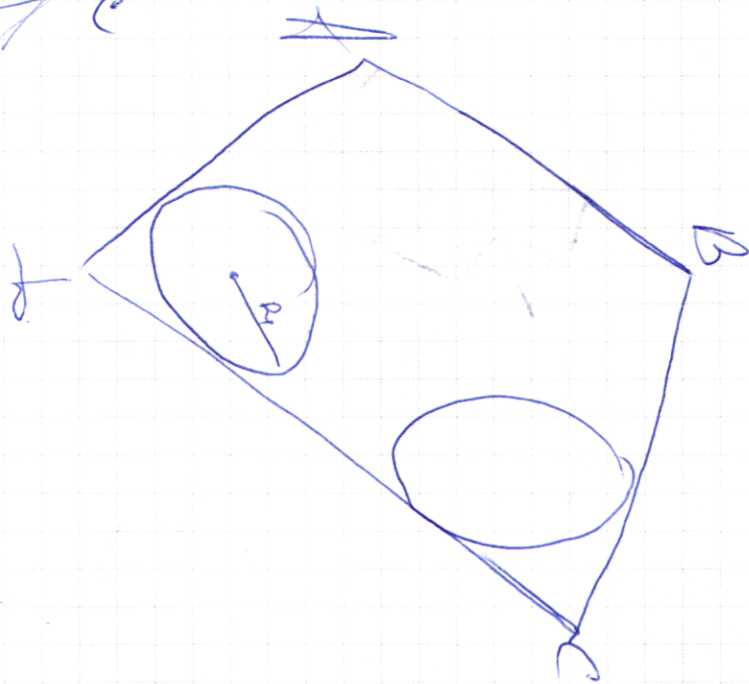
$$xy = 900 - 22y$$

$$xy = 2(450 - 11y)$$

$$x = \frac{2(450 - 11y)}{y} = \frac{900 - 22y}{y}$$

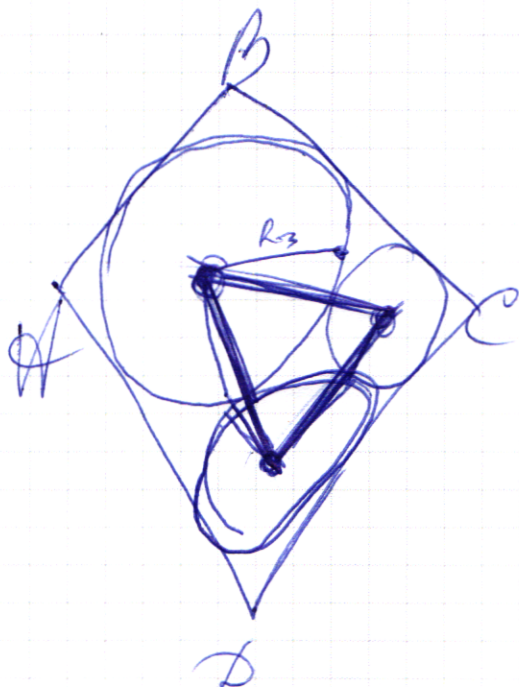
$$17y =$$

$$15y$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.3.3.3





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-009

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)