

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

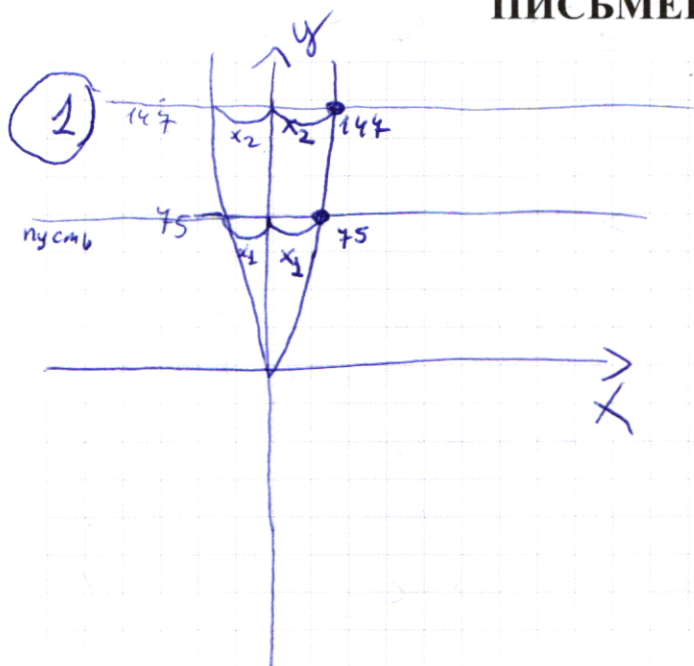
ШИФР

2010

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y = 3x^2$$

если $y = 75$

$$y = 75$$

то $75 = 3x_1^2$
 $x_1^2 = 25^2$

Длина отрезка будет $2x_1 = 10 = a$

если $y = 147$

$$y = 147$$

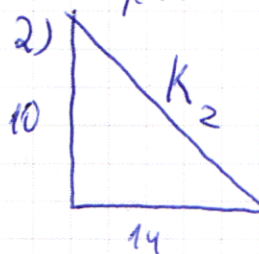
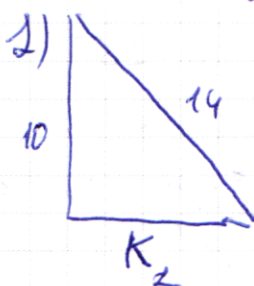
то $147 = 3x_2^2$
 $x_2^2 = 49$

$$x_2 = 7$$

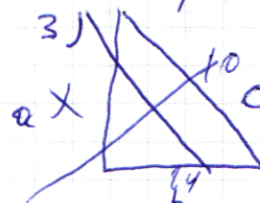
Длина отрезка будет $2x_2 = 14 = b$

($y = a$ $y = 147$ $y = z$)
 $a = 10, b = 14$

Значит будет 2 варианта



$K = 3$ отрезок.



так невозможно

поэтому это $c \rightarrow b$ всегда

$$1) K_1 = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{196 - 100} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

$$2) K_2 = \sqrt{14^2 + 10^2} = \sqrt{296} = \sqrt{286} = 2\sqrt{74}$$

Значит $x_3 = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$

$$x_4 = \frac{2\sqrt{74}}{2} = \sqrt{74}$$

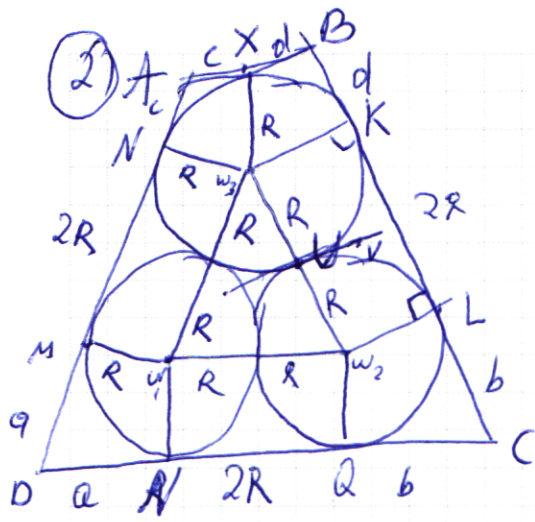
$$y = a \Rightarrow 3x^2 = a$$

$$a = 3x^2$$

ответ

$$a_1 = 3 \cdot (2\sqrt{6})^2 = 72$$

$$a_2 = 3 \cdot (\sqrt{74})^2 = 222$$



$$R_{w_1} = R_{w_2} = R_{w_3}$$

$$AD + BC - AB - CD = 30$$

AB, BC, CD, DA = касательные = 3 радиуса
 $\angle ANW_3 = \angle AMW_3 = \angle DNW_1 = \angle DW_2 = \angle CLW_2 =$
 $= \angle CKW_3 = 90^\circ$

$$KW_3 = LW_2 \mid \Rightarrow K LW_2 W_3 = \text{прямоугольник}$$

$$\angle K = \angle L = 90^\circ$$

прямая U касательная для w_3 и $w_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow w_2 W_2 U = w_2 U V = 90^\circ \Rightarrow w_2 w_3 = 2R = KL$
 Таким способом $w_2 w_3 = w_1 w_2 = w_2 w_3 = w_1 w_2 = 2R$

Таким образом, это DM, DN \Rightarrow касательные $\Rightarrow DM = DN = a$
 Таким способом $BC = EL = b$ $AN = AX = c$, $bx = Bk = d \Rightarrow$

$$\Rightarrow AD + BC - AB - CD = 30$$

$$(a + 2R + c) + (d + 2R + b) - (c + d) - (a + b + 2R) = 30$$

$$a + c + 2R + d + b + 2R - c - d - a - b - 2R = 30$$

$$2R = 30 \quad R = 15 \quad \text{Ответ } R = 15$$

варианты зачет

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	m	n	o	p	z	s	t	u	q	z
1)	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2)	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3)	2	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4)	2	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
5)	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
6)	2	2	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7)	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8)	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9)	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
11)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
12)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2

$$2^2 \cdot 2^{11} = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^{11} = 3 \cdot 2^{13} \text{ варианты}$$

Ответ $3 \cdot 2^{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- ⑦ Если будет взято 5 чисел, то вычислим минимальную
от $[1, 25] = 1, 2, 3, 4, 5$
от $[26, 50] = (26, 27, 28, 29, 30) \Rightarrow 31, 32, 33, 34, 35$
от $[51, 75] = (51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60)$ не можем $\Rightarrow 61, 62, 63, 64, 65$
от $[76, 100] = (76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90)$ не можем $\Rightarrow 91, 92, 93, 94, 95$

$$\Rightarrow 1+2+3+4+5 + 31+32+33+34+35 + 61+62+63+64+65 + 91+92+93+94+95 = 15 + 165 + 315 + 465 = \underline{\underline{960}}$$

Ответ: 960

- ③ x — ~~н~~ число десят в алфавите
 k — количество

$$\begin{cases} x < \frac{k}{2} \\ x-1 = \frac{k}{26} \\ 21x + k = 700 \end{cases}$$

$$\frac{47k + 21 \cdot 26}{26} = 700$$

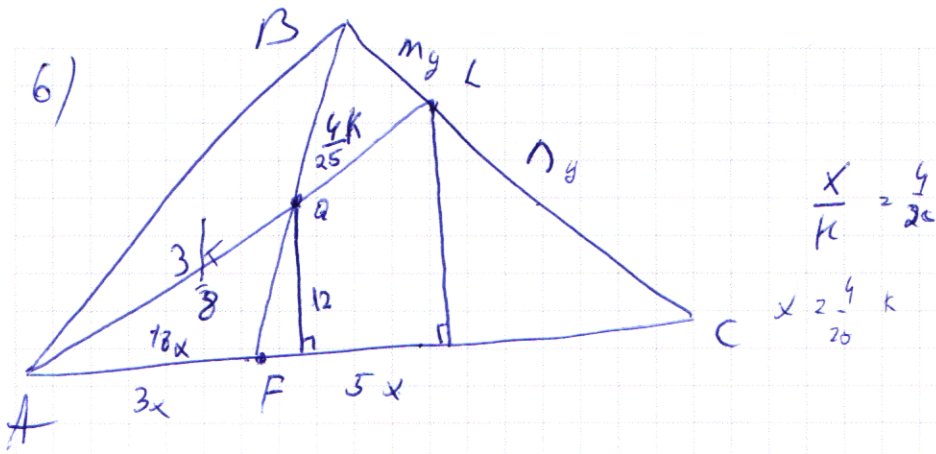
$$47k + 546 = 18200$$

$$k \geq \underline{\underline{35}}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$$\frac{x}{k} = \frac{4}{20}$$

$$x = 2 \cdot \frac{4}{20} k$$

$$\frac{5k}{8} - \frac{4}{20} k = \frac{125k - 32k}{200} = \frac{93k}{200}$$

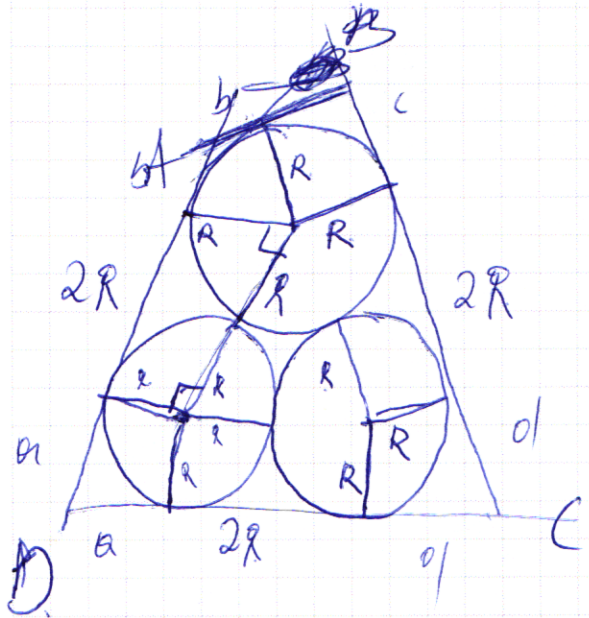
- 12 3 4 5 31 32 33 34 35 52 53 54 55
81 82 83 84 85

$$\begin{array}{r} 20 + 32 = 56 \\ 12 \\ 465 \\ + 315 \\ \hline 165 \\ 15 \\ \hline 960 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 21 \\ 26 \\ \hline 52 \\ 546 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 26 \\ 700 \\ \hline 18200 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 18200 \\ 546 \\ \hline 17654 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 17654 \\ 142 \\ - 355 \\ \hline 264 \\ - 235 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$k = 345$$



$$x + 2R + x + 2R + x + 2R + x + 2R + x + 2R = 30$$

$$2R = 30$$

$$R = 15$$

$$x < \frac{k}{22}$$

$$x - 1 = \frac{k}{26} \quad x = \frac{k+26}{26}$$

$$22x + k = 700$$

$$47k + 21 \cdot 26 = 700$$

$$47k + 546 = 18200$$

$$47k =$$

$$\begin{array}{r} 96 | 4 \\ - 8 \\ \hline 16 \end{array}$$

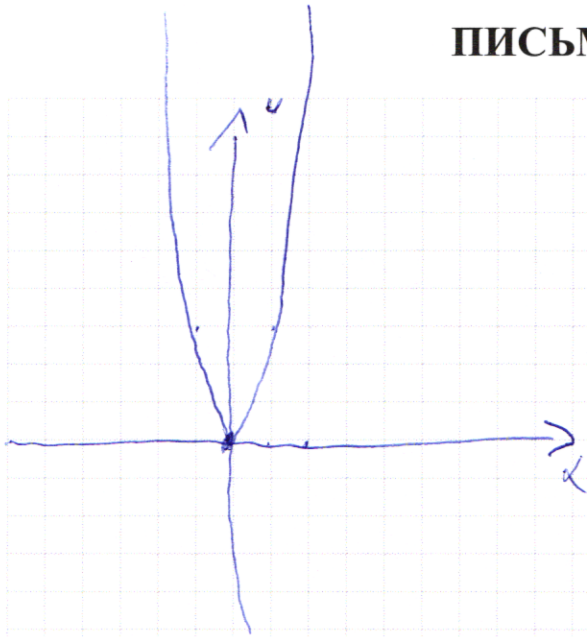
$$\begin{array}{r} 96 | 16 \\ \hline 6 \\ 286 | 16 \\ - 16 \\ \hline 136 \end{array} \quad 6\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 286 | 4 \\ - 28 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 16 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 3x^2$$

4	4
3	3
2	12



$$144 = 3x^2$$

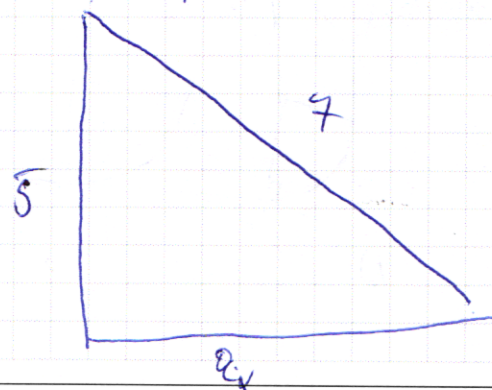
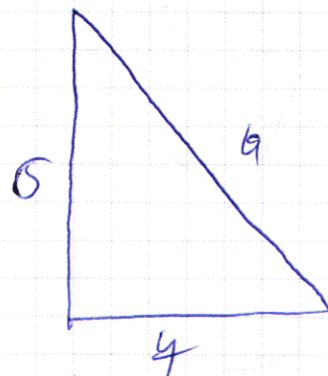
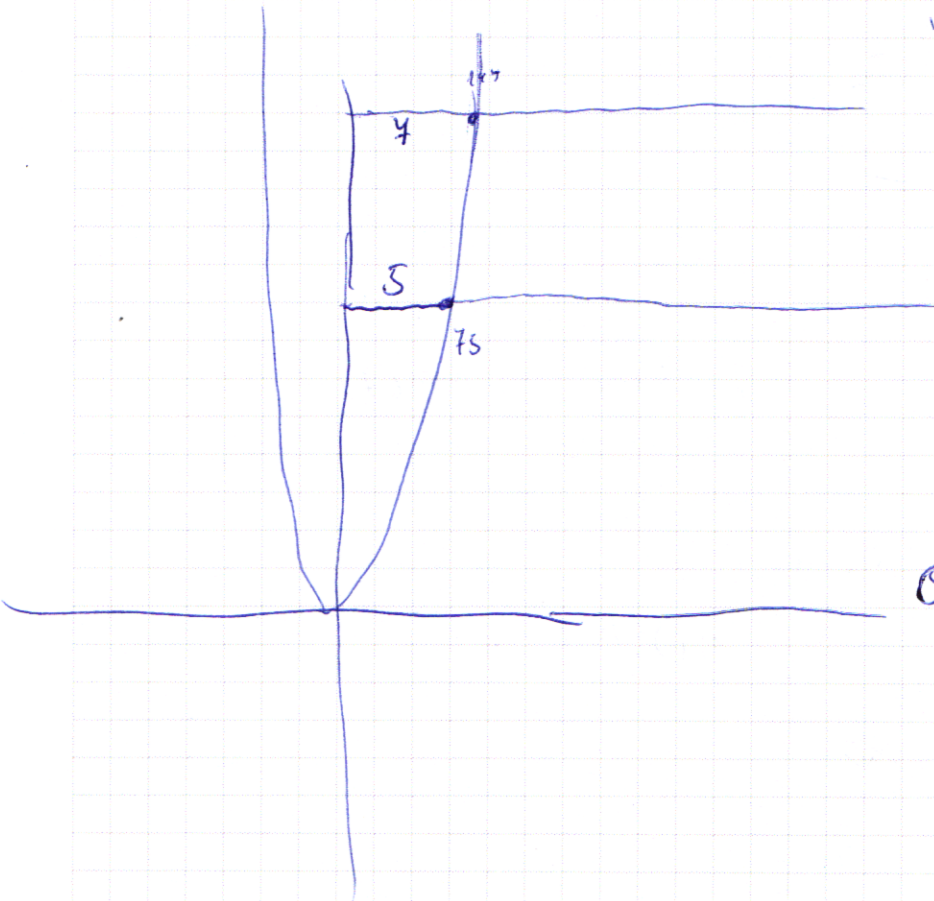
$$x^2 = \frac{144}{3} = 48$$

$$x = 4$$

$$45 = 3x^2$$

$$x^2 = 15$$

$$x = 5$$

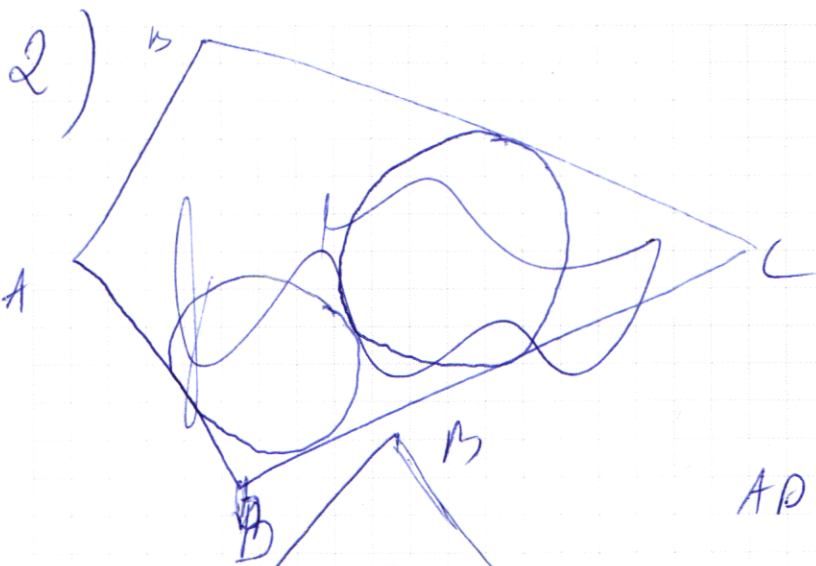


$$x_1 = \sqrt{48 + 25} = \sqrt{74}$$

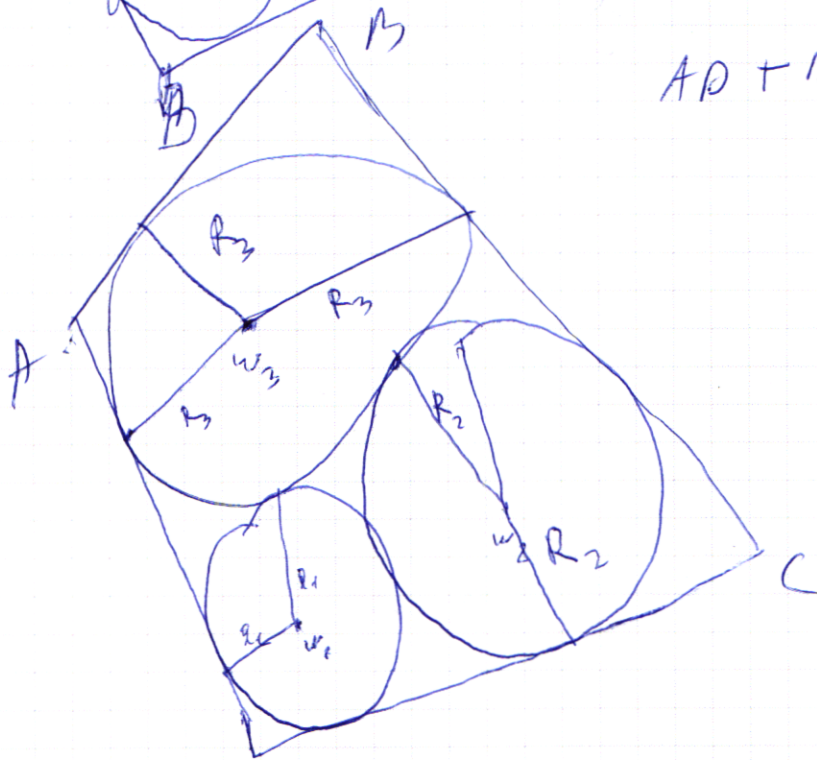
$$x_2 = \sqrt{48 - 25} = \sqrt{24}$$

$$y = 3 \cdot 74 = 222 \checkmark$$

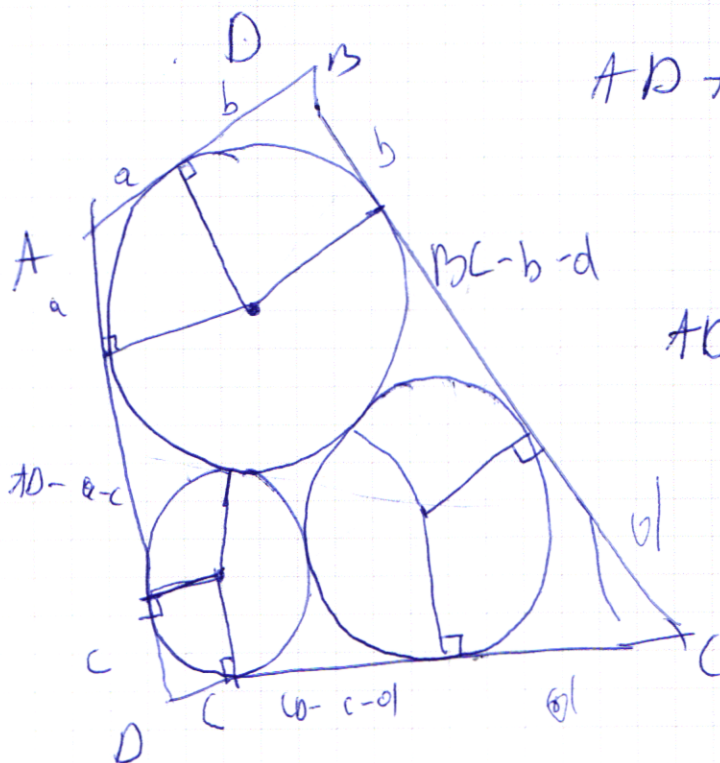
$$y = 3 \cdot 24 = 72 \checkmark$$



$$AD + BC - AB - CD = 30$$



$$AD + BC - AB - CD = 30$$



$$AD + BC - a$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)