

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

2-011

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$ является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 1 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

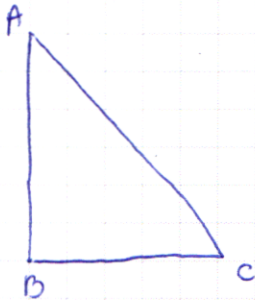
1) $y = 5x^2$

$y = 125 \Rightarrow x^2 = 25$ (I сторона прямоуго. треугол.)

$y = 80 \Rightarrow x^2 = 16$ (II сторона прямоуго. треугол.)

I сторона - 5 II сторона - 4

I вариант



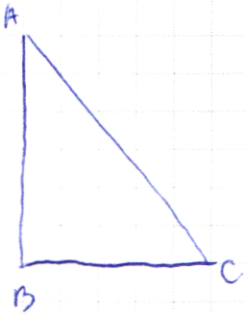
$AB = 5$
 $BC = 4$ } $\Rightarrow AC^2 = 5^2 + 4^2 = 41$

(по теореме Пифагора)

$y = 5x^2$ $x^2 = 41 \Rightarrow y = 205$

$y = a$ $a = 205$

II вариант



$AC = 5$
 $AB = 4$ } $\Rightarrow BC^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

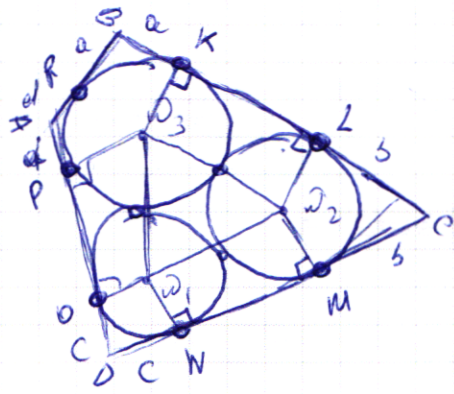
$y = 5x^2$ $x^2 = 9 \Rightarrow y = 45$

$y = a$ $a = 45$

Ответ. $a = 45$

$a = 205$

2)



K, L, M, N, O, P, R - это точки
где стороны четырехугольника
 $ABCD$ касаются окружностей
 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$$\left. \begin{array}{l} BR = BK = a \\ CL = CM = b \\ DO = DN = c \\ AR = AP = d \end{array} \right\} \Rightarrow \text{поскольку эти отрезки касательной} \\ \text{проведённой из одной точки.}$$

~~также~~ ~~так~~ Присоединим точки $KL\omega_2\omega_3$ получим
прямоугольник так как $\omega_3 K = \omega_2 L$ и
 $\omega_3 K \parallel \omega_2 L$ ($\angle \omega_3 K L = 90^\circ$) \Rightarrow
 $\Rightarrow KL = \omega_3 \omega_2 (2R)$
 $MN\omega_1\omega_2$ тоже прямоугольник \Rightarrow
 $\Rightarrow MN = \omega_1 \omega_2 (2R)$
 $OP\omega_3\omega_1$ прямоугольник \Rightarrow
 $\Rightarrow OP = \omega_3 \omega_1 (2R)$

$$AD + BC - AB - CD = 2B$$

$$d + c + OP + a + b + KL - d - a - c - b - MN = 2B$$

$$OP + KL - MN = 2B$$

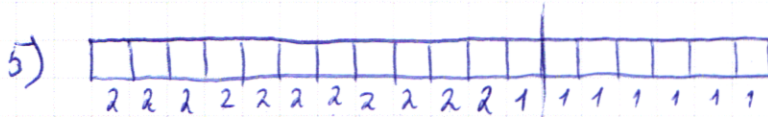
$$2R + 2R - 2R = 2B.$$

$$2R = 2B$$

$$R = 14 \text{ (радиус окружности)}$$

Ответ 14

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Каждая клетка это 1 цифра а вот ~~в~~ нашего
18-значного числа. А под ними цифра обозна-
чают сколько вариантов есть для этого числа.
Так как в шесте есть шесть и 3 которые
идут подряд то вариантов будет 1 для каждого
из шести. И вариантов ~~для~~ того как мы
разными вариантами эти 3 тройки могут быть
в 18-значном числе равно 13.
А остальные числа кроме одного имеют
два варианта "5" или "8" а у последнего
из этих чисел 1 вариант чтобы всех чисел
было в 18 19 значном числе.

Количество 18-значных чисел будет равно
 $2^{11} \cdot 13$

Ответ $2^{11} \cdot 13$

7) 6 целых чисел из

1) $[1, 40]$

2) $[41, 80]$

3) $[81, 120]$

4) $[121, 160]$

у получится 24 числа.

Чтобы разность любых двух чисел не раздвигалась на 40 нужно взять наименьшие числа которые при делении на 40 дают разные остатки. И таким способом мы возьмём сумма этих чисел будет равна 1740.

Например

1) $[1; 40]$ - 19, 20, 21, 22, 23, 24

2) $[41; 80]$ - 53, 54, 55, 56, 57, 58

3) $[81; 120]$ - 85, 88, 89, 90, 91, 92

4) $[121; 160]$ - ~~121, 122, 123, 124, 125, 126~~
121, 122, 123, 124, 125, 126

Сумма этих чисел 1740

Ответ 1740

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7)	$\begin{matrix} 6 \\ 133 \\ 121 \\ 43 \end{matrix}$	$\boxed{40}$	1	41	81	121	
4)	$\begin{matrix} 144 \\ 126 \\ 98 \end{matrix}$	122	123	124	125		$\boxed{3 \cdot 247}$
3)	$\begin{matrix} 87 \\ 88 \\ 89 \end{matrix}$	88	89	90	91		$\boxed{3 \cdot 178}$
2)	$\begin{matrix} 52 \\ 53 \end{matrix}$	54	55	56	57		$\boxed{3 \cdot 111}$
1)	$\begin{matrix} 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \end{matrix}$	20	21	22	23		$\boxed{3 \cdot 43}$

$$3(247 + 178 + 111 + 43) = 580 \cdot 3 = 1740$$

$$3(139 + 144 + 93 + 98 + 48 + 52 + 1 + 6)$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 37 \\ \hline 293 \\ 17 \\ \hline 1443 \end{array}$$

$$3(140 + 150 + 140 + 150) = 3(580) =$$

$$3(19 + 24 + 53 + 58 + 87 + 92 + 121 + 126) =$$

$$= 3(140 + 150 + 150 + 140)$$

$$18x + 17y + 22x = 900$$

$$15x + a = 17x - b$$

$$a + b = 2x$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$-37b - 39a = -1800$$

$$37b + 39a = 1800$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 22x + 17x - b = 900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ 27x + 15x + a = 900 \end{array}$$

$$39x + a = 900$$

$$37 \left(\frac{a+b}{2} \right) + a = 900$$

$$37b + 39a + 2a = 1800$$

$$37b + 2a = 1800$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)

$$y = 5x^2$$

$$y = 125 \quad \text{т.е.} \quad x = 5$$

$$y = 80 \quad \quad \quad x = 4$$

$$5^2 - 4^2 = 3^2$$

$$y = 45$$

$$5 + 4^2 = 25 + 16 = 41$$

$$41 \cdot 5 = \underline{\underline{205}}$$

4)

$$AD + BC - AB - CD = 2R$$

$$c + b + x + d + 2 + a - c - d - a - b - y = 2R$$

$$x + 2 - y = 2R$$

$$4R - 2R = 2R$$

$$2R = 2R \quad \quad \quad R = \frac{1}{4} \quad \quad \quad \text{Т}$$

$$5) |ax-a| \in \sqrt{x-3}$$

$$\underline{x \geq 3}$$

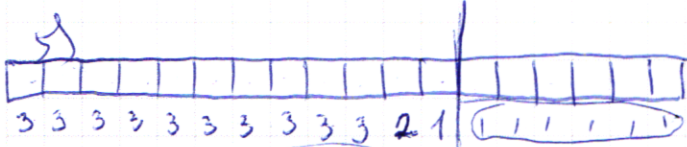
$$|ax-a| \in \sqrt{x-3}$$

$$|a(x-1)| \leq \sqrt{x-3}$$

$$(ax-a)^2 \leq x-3$$

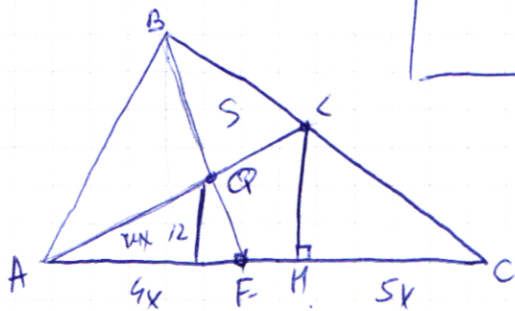
$$a^2(x-1)^2 \leq \underline{x-3}$$

$$a^2 \leq \frac{x-3}{(x-1)^2}$$



$$\begin{aligned} 3^{10} \cdot 2 &= 13 \\ 3^{10} \cdot 26 &+ \end{aligned}$$

6)



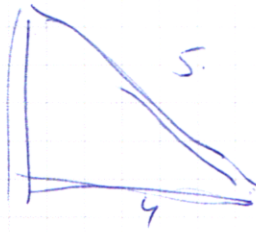
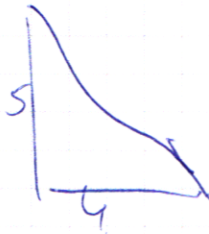
$$\frac{S_{BAC}}{S_{BAF}} = \underline{\underline{25}}$$

CH - ?

$$S_{ADF} = h \cdot 2x$$

$$S_{BFC} = h \cdot 1.5x$$

$$\frac{2.5}{2} = \frac{5}{7}$$



3) 15 мешков по 20 кг

18 мешков по 1 кг 500 г

22 мешков по 20 кг + мешков - 900 кг

$$15x > \text{мешков} \quad x \text{ кг} \quad 576 \text{ мешков}$$

$$18(x+1)$$

$$\begin{aligned} 15x + 1 + 22x &= 900 \\ 39x &= 899 \\ x &= \frac{899}{39} \end{aligned}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)