

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

2-012

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

7

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чтобы сумма была максимальной из предложенных вариантов
нужно выбрать максимальное количество возможных чисел

а чтобы числа не повторялись на 30 нужно взять
числа которые по модулю равны на 6

[120, 91] 120 114 108 102 96 90

[90, 61] 84 83 82 81 80 79

[60, 31] 58 57 56 55 54 53

[30, 1] 22 21 20 19 18 17

$$264 + 260 + 256 + 252 + 248 + 244 = 1524$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

квадратами покажем 16-значное число

$$\begin{array}{r} 2222222222 \\ 9999 \\ \hline 2222222222 \\ 99999 \\ \hline \end{array} = 2\text{-й вариант}$$
 Это где 9999 слева

$$\begin{array}{r} 2222222222 \\ 99999 \\ \hline \end{array} = 2\text{-й вариант}$$

$$\begin{array}{r} + \\ 2222222222 \\ 99999 \\ \hline \end{array}$$

а числа на квадратиках
 это возможные значения
 в нашей системе 2 по модулю
 что 3 или 4.
 таких чисел будет $(2-2) \cdot 13$
 по модулю что ~~2~~ $2^2 - 2$
 это значения катя из
 квадратов а 13 это по модулю
 Ответ: $(2-2) \cdot 13$

$$\frac{38}{21} - 3x + 3$$

$$5x^2 - 16x + 12$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3
(Нумеровать только чистовики)



2-012

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

4

$$\sqrt{x-1} \geq |ax-2a|$$

$$b-1 \geq a^2 b^2 + 4a^2 b + 4a^2$$

$$a^2 b^2 - 4a^2 b - b + 4a^2 - 1 \leq 0$$

$$a^2 b^2 - x(4a^2 + 1) + 4a^2 + 1 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{4a^2 + 1}{a^2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{4a^2 + 1}{a^2}$$

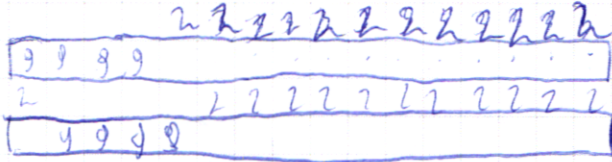
$$\cancel{x_1} - \cancel{x_1} \neq 1$$

$x_1 + x_2 = x_1 x_2$ если x_1 и x_2 равны \Rightarrow ~~тогда~~

$4a^2 = 4a^2 + 1$ значит что Нет такого a

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)



$$2 \cdot 13$$

$$x = 2b^2 + 2$$

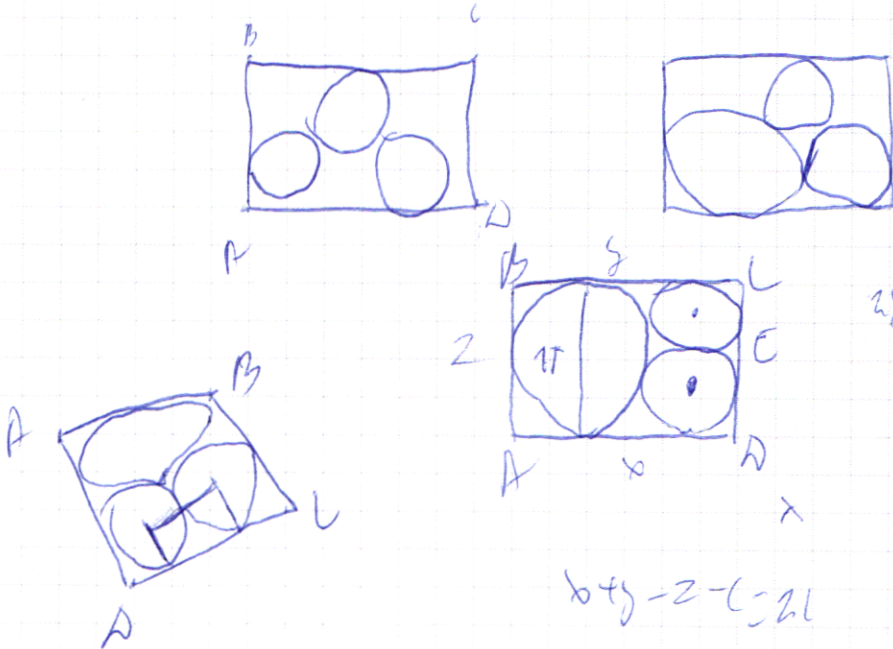
$$(3+x)/x = 4a^2 + 1$$

$$x - 2 = 3$$

$$x + 2 = \frac{4a^2 + 1}{a^2}$$

$$x + 2 = \frac{4a^2 + 1}{a^2}$$

3)



$$\frac{4a^2 + 1}{a^2} + x = 4a^2 + 1$$

$$2x = 4b^2 - 2a$$

$$x + 2a = 1$$

$$x = 2b^2 + 2$$

$$x + y - z - l = 2l$$

$$D \geq a^2 b^2 - x(4a^2 + 1) + 4a^2 + 1$$

$$x - 1 \geq a^2 b^2 - 4a^2 x + 4a^2$$

$$\frac{x-1}{b^2 - 4b^2 + 4} \geq a^2$$

$$\frac{x-1}{(x-2)^2} \geq a^2$$

$$\frac{\sqrt{x-1}}{b-2} \geq a$$

$$b^2 - 4b^2 + 4$$

$$(x-3)(x+4)$$

$$(-4) \cdot 3$$

$$4x^2 - 8bx + 16 \cdot \frac{1}{4} - x + 1$$

$$b^2 - 4b^2 + 4 \leq 4b - 4$$

$$x^2 - 4x + 1$$

$$28x + t = 2b(x+2)(t+2) = 15(x+6)(t+2)$$

$$77(x + t + 2t + 2) = (x + 2x + 6t + 12) 15 = 28xt$$

$$28xt = 15xt + 30x + 90t + 180$$

$$13xt = 30(x + 3t + 6)$$

198 045 092 184 186 183

620 114 118 118 116 115

~~74 93 92 97 89 88 84 83 82 80 49 48~~

59 56 54 54 53 52

27 20 09 08 04 06

$$200 - 2 + 200 - 5 + 200 - 8 + 200 - 11 + 200 - 14 + 200 - 17$$

$$200 - 59 = 27043$$

$$(27b + 42)(t + 2)$$

$$264t + 226$$

$$200 -$$

$$21xt + 42b + 42t + 84 = 28xt + 28b$$

$$264ab - 4 - 8 - 12 - 16 - 20 -$$

$$1200 + 360 + 24$$

$$1584 - 60$$

$$2xt = 18b + 42t + 84 = 0$$

$$xt = 9b + 21t + 42$$

$$6t - 6x = 21t + 2t$$

$$6x + 02t - 15$$

$$2xt = 42t - 28x$$

$$xt = 6t - 4x$$

$$28xt + 28x = 27xt + 42t$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \cdot 28 \cdot n = A \quad x \quad 28xt = 29(b+2)(t+1) = 75(x+6)(t+2)$$

$$28 \cdot \frac{(t+2)}{t}$$

$$28(x+2) \frac{t}{(t+1)} = A$$

$$75(x+6) \frac{t}{t+2} = A$$

$$\frac{29(b+2)}{t+1} = \frac{29b}{t} = \frac{75(x+6)}{t+2}$$

$$28xt = 65bt + 30b + 90t + 180$$

$$28xt = 29bt + 42t + 21x + 42 \quad 21xt + 42t = 28bt + 28x$$

$$4bt = 42t + 20x + 42$$

$$4bt + 28b = 42t$$

$$bt + 4b = 6$$

$$28bt + 6bx = 75bt + 90t$$

$$13bt + 56b = 90t \quad 56b = 90t - 13bt$$

$$13bt + 56b = 90t$$

$$4bt = 42t + 20x + 42$$

$$2bt = 3x + 16t + 46$$

$$2xt =$$

$$29(xt + x(2t+2)) =$$

$$15(xt + 2x + 6t + 12)$$

$$4bt + 4b + 14t + 14 + 28xt + 90b + 30t + 60$$

$$\frac{28x}{1} = \frac{29(x+2)}{1+0} = \frac{25(x+6)}{1+2}$$