

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

2-014

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$ является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “5” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “3” ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 1 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

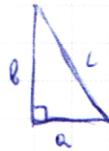
1. $y = 5x^2$

$y = 125 \Rightarrow x = 5$

$y = 80 \Rightarrow x = 4$

$y = a \Rightarrow x = 3$

$a = 45$



$a^2 + b^2 = c^2$ Ответ

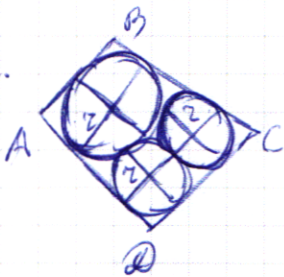
$3^2 + 4^2 = 5^2$

$9 + 16 = 25$

$25 = 25$

Ответ $a = 45$.

2.



$AD + BC - AB - CD = 28$

$AD = 4r$

$4r + 4r - 2r - 4r = 28$

$BC = 4r$

$2r = 28$

$AB = 2r$

$r = 14$ ответ

$CD = 4r$

3. 1 лист - 15 марок

не все.

1 лист - 17 марок

1 лист - пуст

22 марок на каждой листе - 900 всего

$900 : 22 = 41$

4 альбома 41 листов

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

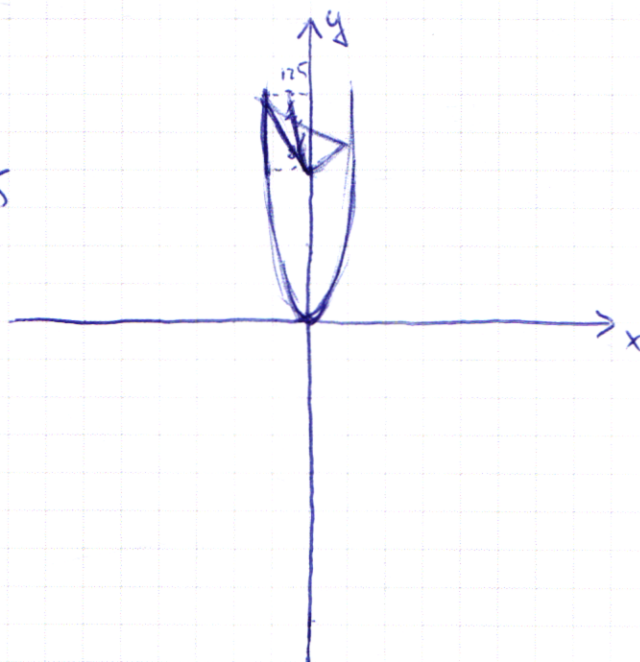
1. $y = 5x^2$
 $y = 125 \Rightarrow x = 5$
 $y = 80 \Rightarrow x = 4$
 $y = a \Rightarrow x = 3$
 $a = ?$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

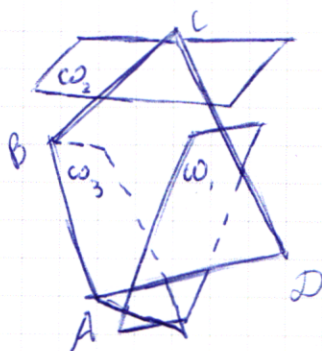
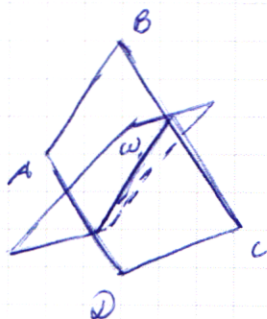
$$9 + 16 = 25$$

$$x = 3$$

$$y = 45$$



2.



3.

1 лист - 15 марок

не все

1 лист - 17 марок

1 лист - пуст

22 марок на каждой листе - 900 всего

$$\begin{array}{r} 900 \overline{) 22} \\ \underline{88} \\ 22 \\ \underline{22} \\ 0 \end{array}$$

41 листов у альбума

если 1 лист - 17 марок, то останется
пустым 41-ый, тогда $17 \cdot 40 = 680$

у Чиполлино 680 марок

$$\begin{array}{r} 17 \\ 40 \\ \hline 680 \end{array}$$

4. $|ax - a| \leq \sqrt{x-3}$ а $x=2$

$|2a - a| \leq \sqrt{2-3}$

$|a| \leq \sqrt{2-3}$

$$\begin{cases} a \leq \sqrt{2-3} \\ -a \leq \sqrt{2-3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^2 &\leq -1 \\ a^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

$a \geq 1$

$a \in [1; +\infty)$

+ $a=5$

$|5x - 5| \leq \sqrt{x-3}$

$5x - 5 \leq x - 3$

$4x \leq 2$

$x \leq 2$

+ $a=10$

$10x - 10 \leq x - 3$

$9x \leq 7$

$x \leq \frac{7}{9}$

$(2a - a)^2 \leq -1$

$a^2 \leq -1$

$a^2 \geq 1$

$a \in [1; +\infty)$

$|ax - a|^2 \leq x - 3$

~~$2a - a \leq$~~

~~$2x - 2 \leq -1$~~

~~$2x \leq 1$~~

~~$x \in (-\infty; \frac{1}{2}]$~~

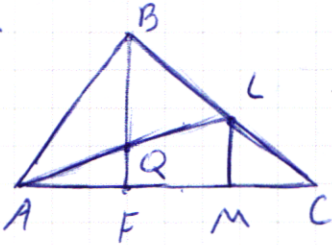
~~$2a - a \leq -1$~~

~~$2a \leq 1 \leq a \leq \frac{1}{2}$~~

~~$a \leq 1$~~
 ~~$a \in$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



$$\frac{AF}{FC} = \frac{4}{5}$$

$$BF \cap AL = Q$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{S_{BAC}}{S_{BAC}} = 25$$

$$QF = 12$$

$$LM = ?$$

$$k^2 = \frac{1}{25} \quad k = \frac{1}{5}$$

$$\frac{AB}{BQ} = \frac{1}{5}$$

$$AB = 5BQ$$

5. 583333335858585858

5555555558

8888888885

5555555585

8888888855

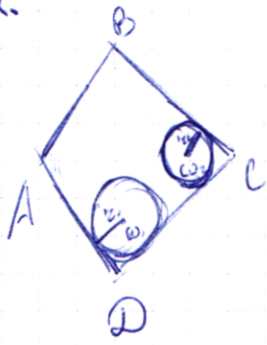
5555555588

24

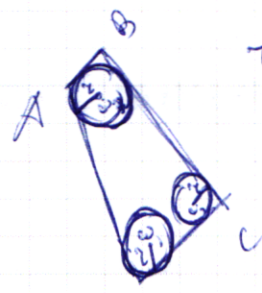
$$12 + 12 + 11 + 12 + 11 + 11 + 11 = 36 + 44 = 80$$

333333585858585858

2.

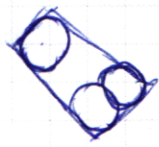


$$r_1 = r_2 = r_3$$



$$r_1 = r_2 = r_3$$

$$AD + BC - AB - CD = 28$$

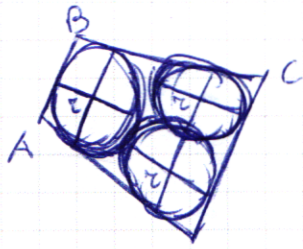


$$CD = 4r$$

$$AD = 4r$$

$$AB = r$$

$$BC = 4r$$



$$AD = 4r$$

$$BC = 4r$$

$$CD = 4r$$

$$AB = 2r$$

~~$$4r + 4r - 2r =$$~~

$$4r + 4r - 2r - 4r = 28$$

$$2r = 28$$

$$r = 14$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-014

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-014

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)