

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

## 9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

2-015

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 5x^2$  пересекает прямые  $y = 125$ ,  $y = 80$  и  $y = a$ , отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ . Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 28$ .
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$  является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 4 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 25$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 40]$ ,  $[41; 80]$ ,  $[81; 120]$ ,  $[121; 160]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



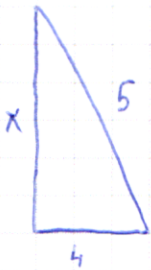
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)  $y = 5x^2$

$y = 125$      $125 = 5x^2$      $25 = x^2$      $x = 5$

$y = 80$      $80 = 5x^2$      $16 = x^2$      $x = 4$

$y = a$      $a = 5x^2$

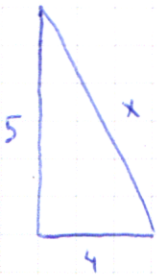


$x^2 + 16 = 25$

$x^2 = 9$

$x = 3$      $a = 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$

$a = 45$



$25 + 16 = x^2$

$x^2 = 41$

$x = \sqrt{41}$      $a = 5 \cdot \sqrt{41}^2 = 5 \cdot 41 = 205$

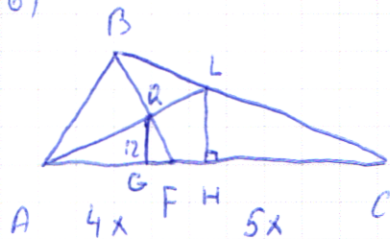
$a = 205$

4)  $|ax - a| \leq \sqrt{x-3}$      $x=2$

$$\begin{cases} ax - a \leq \sqrt{x-3} \\ ax - a \geq -\sqrt{x-3} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 x^2 - 2a^2 x + a^2 \leq x-3 \\ a^2 x^2 - 2a^2 x + a^2 \geq 3+x \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 (x^2 - 2x + 1) \leq x-3 \\ a^2 (x^2 - 2x + 1) \geq 3+x \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 (x-1)^2 \leq x-3 \\ a^2 (x-1)^2 \geq x+3 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 (x-1)^2 \in (x-3; x+3) \\ a \in (-1; 5) \end{cases}$$

6)



$$AF:FC = 4:5$$

$$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{25}$$

$$AG = 12$$

$$LH = ?$$

$$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = k^2 \quad k \text{ аналогичная значения}$$

$$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{5}$$

$S_{AAG}$  аналогичен  $S_{LHC}$

$$\frac{AG}{LC} = \frac{4x}{5x} = \frac{AG}{LH}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{LH} \quad LH = \frac{5 \cdot 12^3}{4}$$

$$LH = 15$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)  $y = 5x^2$

$y = 125$

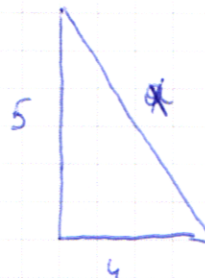
$125 = 5x^2 \quad 25 = x^2 \quad x = \pm 5$

$y = 80$

$80 = 5x^2 \quad 16 = x^2 \quad x = \pm 4$

$y = a$

$a = 5x^2$



~~$125 = 5a$~~   
 ~~$25 = a$~~   
 ~~$80 = 4a$~~   
 ~~$a = 20$~~



~~$a^2 + 16 = 25$~~   
 ~~$a^2 = 9$~~   
 ~~$a = \pm 3$~~

(Пифагорас)

~~$x^2 + 16 = 25$~~

~~$x^2 = 9 \quad x = \pm 3$~~

$25 + 16 = a^2$

$41 = a^2$

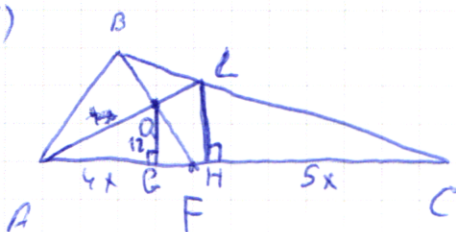
~~$a = \sqrt{41}$~~

$a = 45$

$a = 5 \cdot 41 = 205$

$a = 205$

6)



$AF:FC = 4:5$

$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{25}$

$AG = 12$

$LH = ?$

~~$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = k^2$~~

~~$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{5}$~~

$S_{AAG} \sim S_{LHC}$

$S_{AAG}$  аналогичен  $S_{LHC}$

$\frac{AG}{LC} = \frac{4x}{5x} = \frac{AG}{LH}$

$\frac{4}{5} = \frac{12}{LH} \quad LH = \frac{5 \cdot 12}{4}$

$\text{аналогичен}$

$LH = 15$

$$1) |ax - a| \leq \sqrt{x-3}$$

$$\begin{cases} ax - a \leq \sqrt{x-3} \\ ax - a \geq -\sqrt{x-3} \end{cases} \begin{cases} a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq x-3 \\ a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \geq x-3 \end{cases} \begin{cases} a^2(x^2 - 2x + 1) \leq x-3 \\ a^2(x^2 - 2x + 1) \geq x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2(x-1)^2 \leq x-3 \\ a^2(x-1)^2 \geq x-3 \end{cases}$$

$$a^2(x-1)^2 \in (x-3; x+3)$$

$$a \in (-1; 5)$$

~~x < 2~~

$$|2a - a| \leq \sqrt{2-3}$$

$$|a| \leq$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-015

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-015

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-015

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)