

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

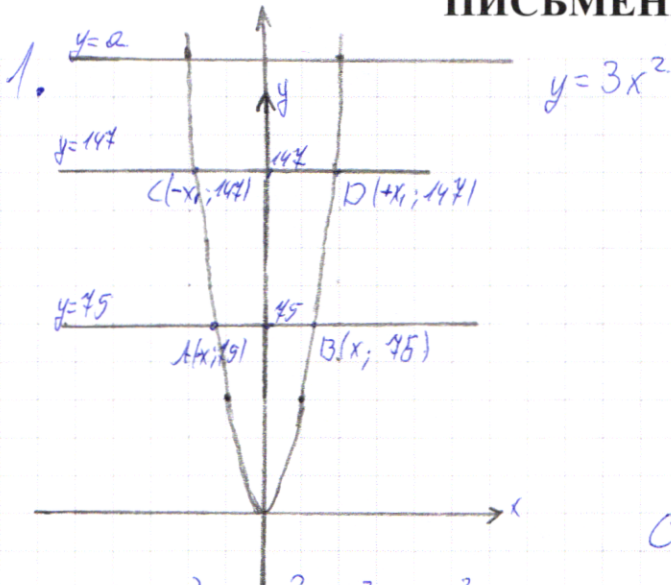
ШИФР

2-016

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры “2”, “5” и “7” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “7” ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$A(-x; 45) \quad 45 = 3x^2 \quad -x = -5$$

$$A(-5; 45)$$

$$B(x; 45) \equiv B(5; 45)$$

$$C(-x; 144) \quad 144 = 3x^2 \quad -x = -7$$

$$C(-7; 144)$$

$$D(x; 144) \equiv D(7; 144)$$

$$CD = 7 + 7 = 14$$

$$AB = 5 + 5 = 10$$

случай I) $10^2 + a^2 = 14^2$

$$100 + a^2 = 196$$

$$a^2 = 96 \quad a = 4\sqrt{6} = 2x$$

$$x = 2\sqrt{6}$$

$$y = 3 \cdot (2\sqrt{6})^2 = 3 \cdot 24 = 72$$

$$a = 72$$

случай II) $10^2 + 14^2 = a^2$

$$100 + 196 = a^2$$

$$a^2 = 296$$

$$a = 4\sqrt{19} = 2x$$

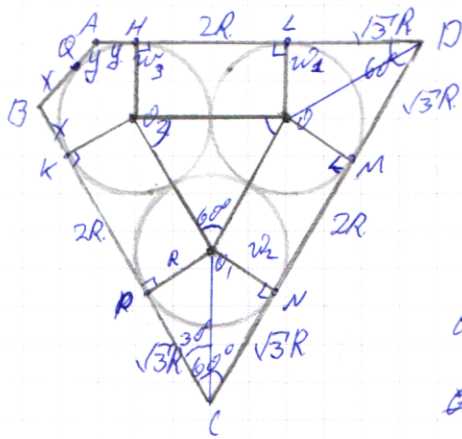
$$x = 3,5\sqrt{19}$$

$$y = 3 \cdot 73,5 = 220,5$$

$$a = 220,5$$

ответ: $a = 72, \quad a = 220,5$

2.



$$R_1 = R_2 = R_3 = R$$

$$AD + BC - AB - CD = 30$$

$$OO_1 = O_1O_2 = O_2O = 2R$$

$R = ?$

$$OO_1 = O_1O_2 = O_2O \Rightarrow \angle O = \angle O_1 = \angle O_2 = 60^\circ$$

$$O_2K = O_1P \Rightarrow O_1O_2 \parallel BC$$

$$O_1N = O_1M \Rightarrow O_1O_2 \parallel MN$$

$$O_2H = OL \Rightarrow O_1O_2 \parallel AD$$

$$O_1O_2 \parallel CD$$

$$\angle O_1O_2K = 90^\circ, \angle O_2O_1P = 90^\circ$$

$$KP = O_1O_2 = 2R$$

$$MN = OO_1 = 2R \Rightarrow \angle OO_1N = 90^\circ, \angle O_1O_1M = 90^\circ$$

$$\angle O_2HL = \angle O_2LH \Rightarrow HL = O_2O = 2R$$

$$\triangle PO_1C \quad \angle O_1CP = 30^\circ \Rightarrow O_1C = 2R \quad \text{и} \quad PC = \sqrt{3}R = CN$$

$$\triangle LO_2D \quad \angle LO_2D = 30^\circ \Rightarrow O_2D = 2R \quad \text{и} \quad LD = DM = \sqrt{3}R$$

$$BQ = BK = x \quad AQ = AH = y$$

$$y + 2R + \sqrt{3}R + x + 2R + \sqrt{3}R - x - y - \sqrt{3}R - 2R - \sqrt{3}R = 30$$

$$2R = 30 \quad R = 15$$

ответ: $R = 15$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $22x < M$
 $26x = M + 26$
 $21x + M = 400$

$M - ?$

$M = 26x - 26$
 $21x + 26x - 26 = 400$
 $47x = 426$ $x = \frac{426}{47} = 15 \frac{21}{47} \Rightarrow$ есть 16 листов

$21 \cdot 16 + M = 400$ $336 + M = 400$
 $M = 364$

проверим. $22 \cdot 16 = 352$ $22x < M$
 $352 < 364$

ответ: $M = 364$.

4. $|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$

если вставить вместо x а 4, то будет правильное неравенство
а - ?

~~ax - 3a~~ $\begin{cases} ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a \geq -\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 - 6a^2x + 9a^2 \leq x-1 \\ ax^2 - 6a^2x - 9a^2 \geq 1-x \end{cases}$

$\begin{cases} 16a - 24a^2 + 9a^2 \leq 3 \\ 16a - 24a^2 + 9a^2 \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15a^2 + 16a - 3 \leq 0 \\ -15a^2 + 16a + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15a^2 - 16a + 3 \geq 0 \\ 15a^2 - 16a - 3 \leq 0 \end{cases}$ $a_1 = \frac{8+\sqrt{19}}{15}$ $a_2 = \frac{8-\sqrt{19}}{15}$

$a_1 = \frac{8+\sqrt{109}}{15}$ $a_2 = \frac{8-\sqrt{109}}{15}$

$a \in \left[\frac{8-\sqrt{109}}{15}, \frac{8-\sqrt{19}}{15} \right] \cup \left[\frac{8+\sqrt{19}}{15}, \frac{8+\sqrt{109}}{15} \right]$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} 3) \quad & 22x < M \\ & 26x = M + 26 \\ & 21x + M = 400 \\ \hline & M = ? \end{aligned}$$

$$x < \frac{M}{26}$$

$$26x = M + 26$$

$$21x + 26x = 26 = 400$$

$$47x = 426$$

$$x = \frac{426}{47} = 15 \frac{21}{47} \Rightarrow \text{есть 16 листов}$$

$$21 \cdot 16 + M = 400$$

$$336 + M = 400$$

$$M = 400 - 336 =$$

$$= 364$$

$$22 \cdot 16 < 364$$

$$352 < 364 \checkmark$$

$$M = 364$$

$$4) \quad |ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$a = ?$$

$$x \rightarrow 4$$

$$3a - ax \leq \sqrt{x-1}$$

$$9a^2 - 6a^2x + a^2x^2 \leq x-1$$

~~$$|2a - 3a| \leq \sqrt{4-1}$$~~

~~$$|a| \leq \sqrt{3}$$~~

~~$$a \leq \sqrt{3}$$~~

~~$$a \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$~~

~~$$|4a - 3a| \leq \sqrt{4-1}$$~~

$$\begin{cases} ax - 3a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 3a \geq -\sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2 - 6a^2x + 9a^2 \leq x-1 \\ ax^2 - 6a^2x - 9a^2 \geq 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a - 24a^2 + 9a^2 \leq 3 \\ 16a - 24a^2 + 9a^2 \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15a^2 + 16a - 3 \leq 0 \\ -15a^2 + 16a + 3 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 15a^2 - 16a + 3 \geq 0 \\ 15a^2 - 16a - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -15a^2 + 16a - 3 \leq 0 \\ -15a^2 + 16a + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a^2 - 16a + 3 \geq 0 \\ 15a^2 - 16a - 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$15a^2 - 16a + 3 \geq 0$$

$$D = 256 - 180 = 76 = 4 \cdot 19$$

$$a_1 = \frac{2\sqrt{19} - 16}{30} = \frac{\sqrt{19} - 8}{15}$$

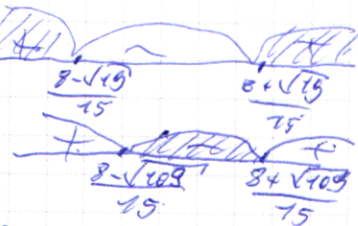
$$a_2 = \frac{16 + 2\sqrt{19}}{30} = \frac{8 + \sqrt{19}}{15}$$

$$15a^2 - 16a - 3 \leq 0$$

$$D = 256 + 180 = 436 = 4 \cdot 109$$

$$a_1 = \frac{16 + 2\sqrt{109}}{30} = \frac{8 + \sqrt{109}}{15}$$

$$a_2 = \frac{8 - \sqrt{109}}{15}$$

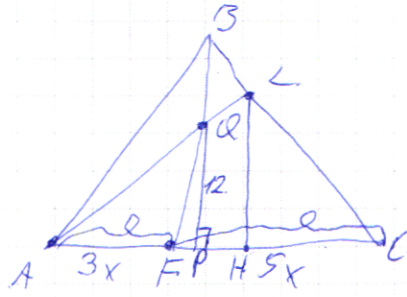
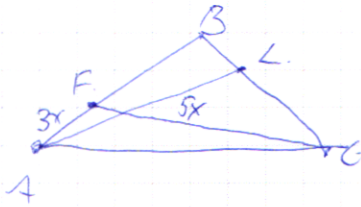


~~$$a_1 = \frac{\sqrt{19} - 8}{15}$$~~

$$a_2 = \frac{8 - \sqrt{19}}{15}$$

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

6)

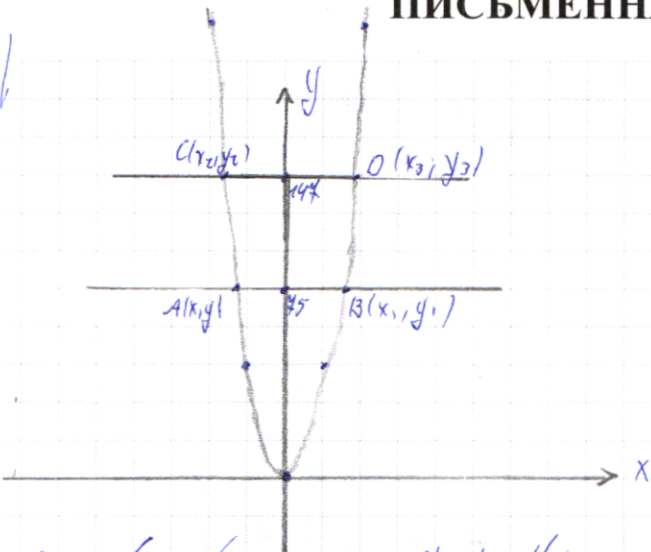


$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{4}{25}$$

LH-?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.1



$y = 3x^2$

x	y
0	0
1	3
-1	3
2	12
-2	12
3	27
-3	27

$A(x_1, y_1) \quad 45 = 3x^2 \quad x = -5$
 \downarrow
 $A(-5; 45)$

$B(x_1, y_1) \quad x = 5$
 $B(5; 45)$

$C(x_2; 144) \quad 144 = 3x^2$
 \downarrow
 $x^2 = 49 \quad x = -7$
 $C(-7; 144)$

$D(7; 144)$

~~$d_{CO} = 5^2 + 4^2 = 41$~~
 $d_{AB} = 5 + 5 = 10$

I) случай

$100 + a^2 = 196$ *a (отрезок на параболы)*
 $a^2 = 96 = 16 \cdot 6$

$a = 4\sqrt{6} = x_{A1} + x_{A2} = 2x$
 $x_1 = -2\sqrt{6} \quad x_2 = 2\sqrt{6}$

$y = 3 \cdot (2\sqrt{6})^2 = 3 \cdot 24 = 72$

$y = 72$

II) случай

$100 + 196 = a^2$
 $a^2 = 296$

$a = 7\sqrt{6} = 2x$
 $x = 3,5\sqrt{6}$

$y = 3 \cdot 73,5 = 220,5$

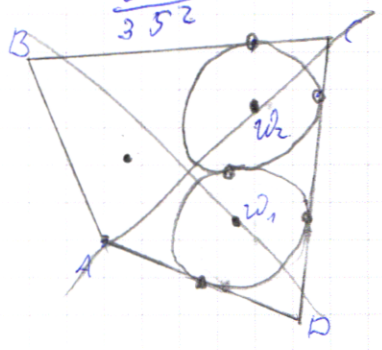
$y = 220,5$

$$\begin{array}{r} \times 12,25 \\ 6 \\ \hline 73,50 \\ \times 73,5 \\ 3 \\ \hline 2205 \\ \times 6 \\ \hline 296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3,5 \\ \times 3,5 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 12,25 \end{array}$$

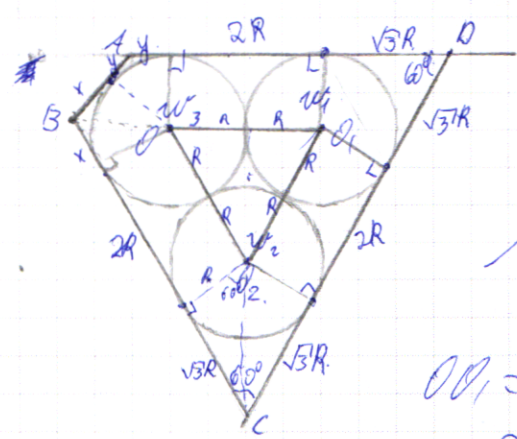
2)

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 16 \\ \hline 132 \\ 22 \\ \hline 352 \end{array}$$



$R_1 = R_2 = R_3$

R-?



~~AD+13~~
AD+13 C-AB-OB = 30

$O_1 = O_2 = O_3 = 2R$

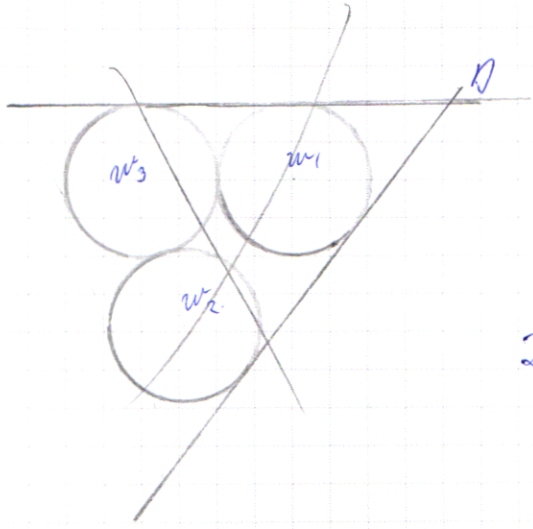
$O_2 C = 2R$

$y + 2R + \sqrt{3}R + x + 2R + \sqrt{3}R - x - y - \sqrt{3}R = 2R - \sqrt{3}R = 30$

$2R + 2R - 2R = 30$

$2R = 30 \quad R = 15$

$$\begin{array}{r} \sqrt{26} \mid 44 \\ 44 \\ \hline 256 \\ 235 \\ \hline 21 \end{array}$$



$26(x-1) = M$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 16 \\ \hline 136 \\ 21 \\ \hline 336 \end{array}$$

3)

$22x < M$

$M = \frac{16}{16} \times 256$
шапок
число шапок
x - число мест

~~$26x = M - 1$~~

$21x + M = 400$

~~$26x = M - 1$~~

~~$x = \frac{M-1}{26}$~~

M-?

~~$21M - 21 + M = 400$~~

~~$44M - 21 = 400$~~

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 21 \\ \hline 26 \\ 52 \\ \hline 546 \end{array}$$

$26x - 26 = M$

$26x = M + 26$

$x = \frac{M}{26} + 1$

~~$21M + 21 + M = 400$~~

~~$21M + 546 + 26M = 400$~~

~~$44M + 546 = 18200$~~

~~$44M - 21 = 18200$~~

~~$44M = 18221$~~

$M = 375$

$$\begin{array}{r} 18200 \\ 946 \\ \hline 17654 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1827 \mid 44 \\ 141 \\ \hline 412 \\ 376 \\ \hline 361 \end{array}$$

$21M + 21 + M = 400$

$21M + 546 + 26M = 400$

$44M + 546 = 18200$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 21 \\ \hline 235 \\ 29 \end{array}$$

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-016

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)