

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

2-017

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \quad 2x^2 - 5x + 1 = -1 \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 2 \quad (y = -1)$$

$$2x^2 - 5x + 1 = 4 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{1}{2} \quad (y = 4)$$

Вершина параболы $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4}$

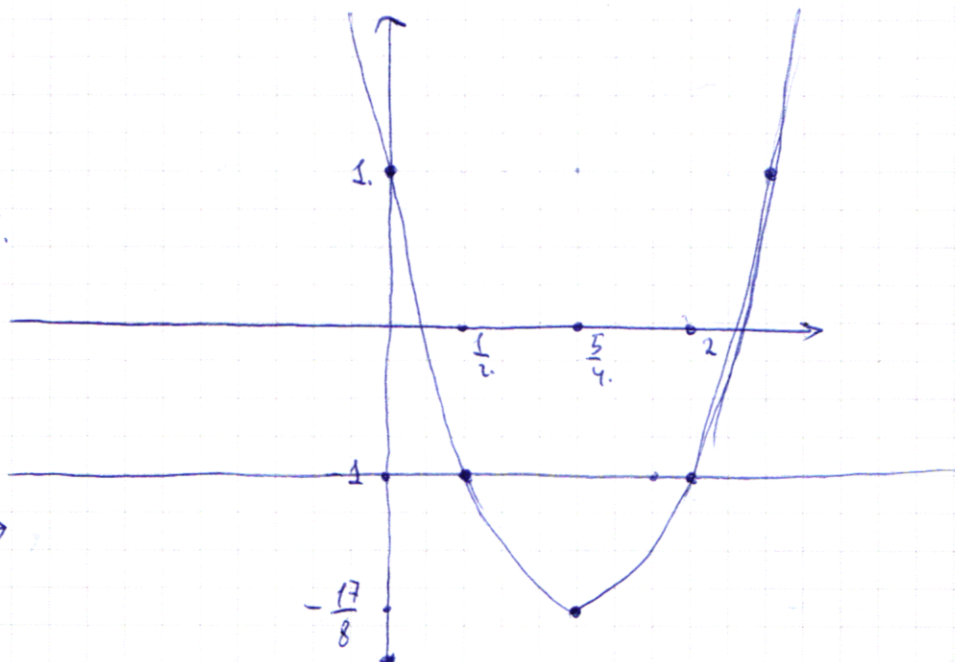
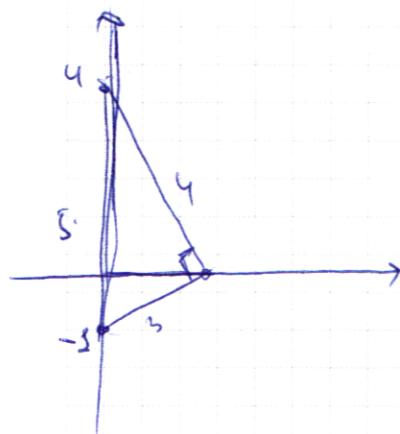
$$y_0 = \frac{D}{4a} = \frac{-17}{8}$$

$$a = 2$$

$$b = -5$$

$$c = 1$$

$$D = b^2 - 4ac = 17$$



a может быть $(-1; 4)$

Ответ - $a \in (-1; 4)$

2)

$\bar{I}$	$\bar{II}$	$\bar{III}$	$\bar{IV}$	$\bar{V}$	$\bar{VI}$	$\dots$										$\bar{XVI}$
9	9	9	9													
				2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

~~количество таких чисел, которые~~

Из 16 цифр "9" — 13 ($\bar{I}, \bar{II}, \bar{III}, \bar{IV},$
 $\bar{V}, \bar{VI}, \bar{VII}, \bar{VIII},$
 $\bar{IX}, \bar{X}, \bar{XI}, \bar{XII},$
 $\bar{XIII}, \bar{XIV}, \bar{XV}, \bar{XVI}$)

Остальные 12 или "3", или "4".

Из условия $\Rightarrow$ что остальные могут быть.

3 или 4, но $\underbrace{33\dots 3}_{12}$ и $\underbrace{44\dots 4}_{12}$ не
 могут быть, потому что в условии написано
 что хотя бы один раз все цифры будут
 использованы.

② — это показывает вариантов 3 и 4.

~~формула~~ Количество $(\Sigma) = 13 \cdot (2^{12} - 2) = 53222$.

Ответ: 53222.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4). $|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$ $x_2 - x_1 = 3$.

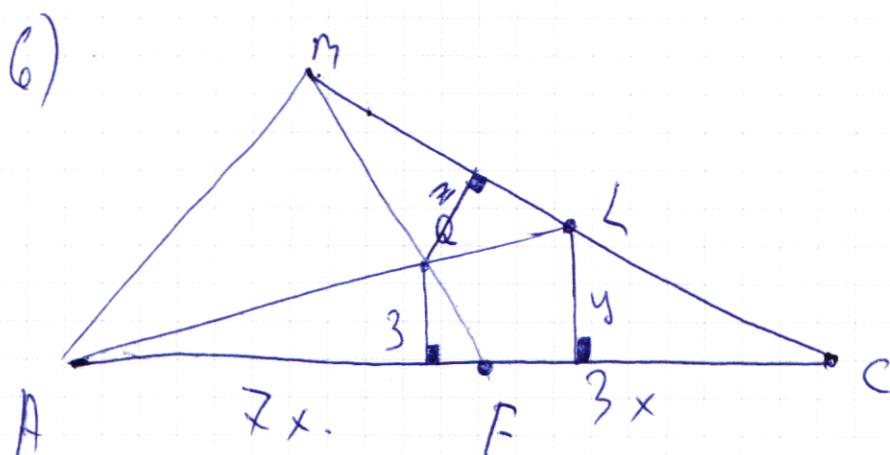
$$(ax - 2a)^2 - (x - 1) \leq 0.$$

$$a^2(x-2)^2 - (x-1) \leq 0.$$

$$a^2(x-2)^2 \leq (x-1)$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$Q \in (-\infty, 2)$$



$$\frac{S_{MACL}}{S_{MAC}} = \frac{7}{75}$$

$$\frac{7x \cdot 3}{2} = 10,5x.$$

$$S_{ALC} = S_{xy}.$$

$$\frac{BL \cdot Z}{2} = S_{BL}$$

$$\frac{AF}{BL} = \frac{3}{2}$$

$$BQL \sim AQL$$

⑤. x - кол. человек
 y - кол. расов

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot 28 = z \\ (x+2) \cdot (y+1) \cdot 21 = z \\ (x+6) \cdot (y+2) \cdot 15 = z \end{cases}$$

$$\cancel{28 \cdot x \cdot y = z}$$

$$\cancel{21(y+1) \cdot z =}$$

$x - ?$

$$28xy = 21(x+2)(y+1)$$

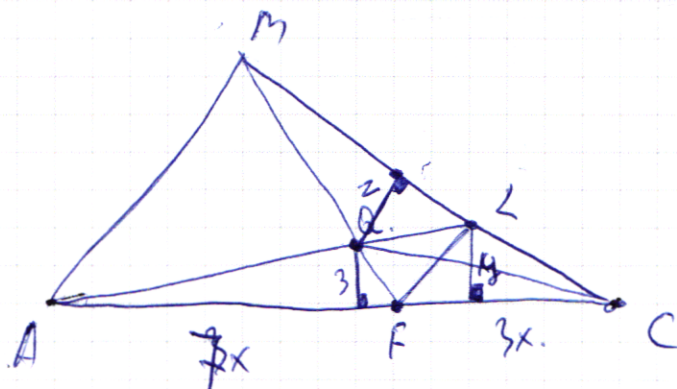
$$21(x+2)(y+1) = 15(y+2)(x+6)$$

$$4xy = 3(x+2)(y+1)$$

$$7(x+2)(y+1) = 15(y+2)(x+6)$$

Ответ x .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



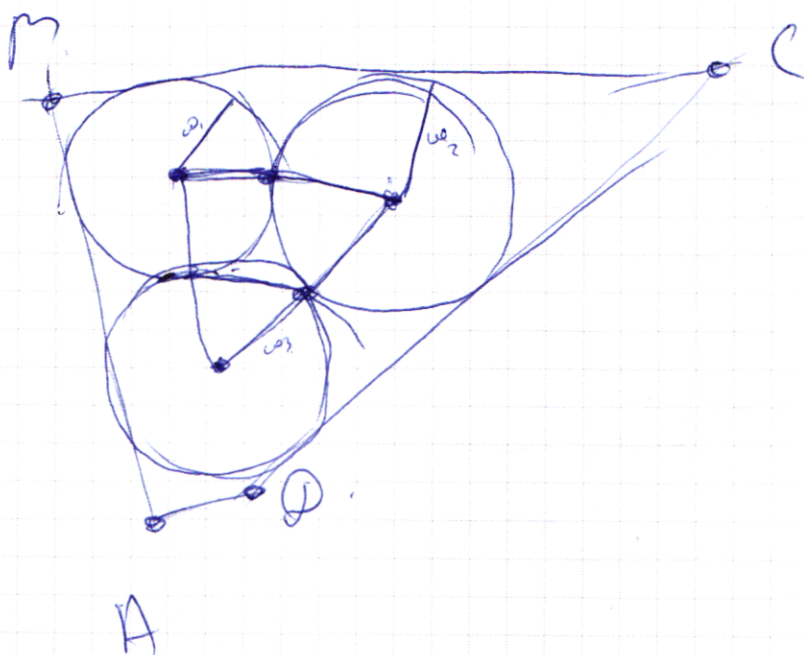
$$\frac{S_{B\&L}}{S_{MAC}} = \frac{7}{36}$$

$$\frac{7x \cdot 3}{2} = 105x$$

$$S_{ALC} = 5xy.$$

$$\frac{BL \cdot Z}{2} = S_{BQL}$$

$$\frac{AF}{BL} = \frac{3}{2}$$



28 pens.	X Supp.	y dus.
21 pens	(x+2) pens	(y+1) dus.
15 pens.	x+6 sups.	(y+2)

$$\frac{xy}{28} = \frac{(x+2)(y+1)}{21} = \frac{(x+6)(y+2)}{15}$$

~~$$\frac{xy}{28} = \frac{(x+2)(y+1)}{21}$$~~

$$\begin{cases} \frac{xy}{4} = \frac{(x+2)(y+1)}{3} \\ \frac{(x+6)(y+2)}{15} = \frac{(x+2)(y+1)}{7} \end{cases}$$

$$4(xy + x + 2y + 2) = 3xy$$

$$4xy + 4x + 8y + 8 = 0$$

$$\frac{(x+6)(y+2)}{(x+2)(y+1)} = \frac{5}{7}$$

$$xy = 28$$

$$(x+2)(y+1) = 21$$

$$xy + y + x + 2 = 21$$

$$\frac{xy + 2x + 6y + 12}{xy + x + 2y + 2} = \frac{5}{7}$$

$$2y + x + 2 = -7$$

$$2y + x = -9$$

$$x = -9 - 2y$$

$$5xy + 5x + 10y + 10 = 7xy + 14x + 42y + 84$$

$$2xy + 9x + 32y + 74 = 0$$

$$2xy + 5x + 32y + 74 = 0$$

$$xy + 4x + 8y + 8 = 0$$

$$2xy + 8x + 16y + 16 = 0$$

$$x + 8y + 58 = 0$$

$$-9 - 2y + 16y + 58 = 0$$

$$14y + 58 = 9$$

$$y = \frac{9-58}{14} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x^2 - 5x + 1 = -1$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

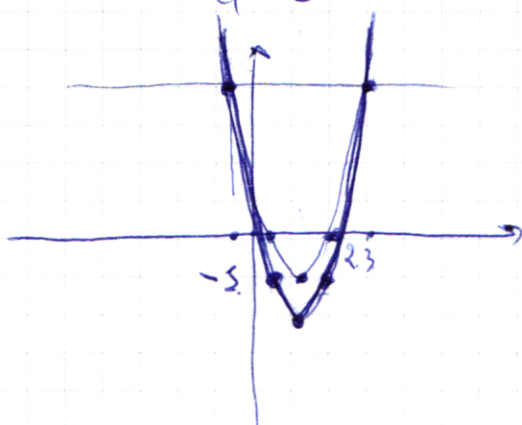
$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9$$

$$\frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \quad \frac{5+3}{4} = 2$$

$$25 - 4 \cdot 2 = 9$$

$$D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 77$$

$$\frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$



$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$y = \frac{D}{4a} = \frac{-17}{8}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3, 4, 9.

2993	222222222221
------	--------------

34, 36, 38, 39, 34, 38, 39, 34, 36, 3

13

12 glyt

3-1 kuzn.

11

3-2 hrs

12

3-3 days

3

3-4 hrs

3-Share

$$13 \cdot (2^{\frac{12}{-2}}) =$$

$$= 4094 \cdot 13 = 53222. - (2)$$

$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$(a_x - 2a)^2 - (x-1) \leq 0.$$

$$a^2(x-2)^2 - (x-1) \leq 0.$$

$$a^2(x^2 - 4x + 4) - (x - 1) \geq 0.$$

$$a^2(3-2) - (3-1) \leq 0$$

X - female, 28yr, Yhus

$x+2$

210p. y+1d.

$x + 6$

159. 9+22.

X-2

$$\frac{x+2}{x+6} = \frac{\sqrt[7]{(y+1)}}{\sqrt[5]{(y+2)}}$$

$$7(x+6)(y+1) = 5(y+2)(x+6).$$

$$\begin{array}{r} 3. \\ 21x(y+1) \\ \hline 28y \\ 4 \end{array} = x + ?$$

$$\frac{15x(y+1)}{28y} = x+6.$$

$$4y(x+2) = 3x(y+1)$$

$$\frac{4y}{y+1} = \frac{3x}{x+2}$$

$$28y \cdot z = x \quad z = \frac{x}{28y}$$

$$2l(y+1) \cdot z = x+1$$

$$15(y+1) \cdot 2 = x+6$$

$$21(y+1) + \frac{x}{28y} = x+1$$

$$15(y+2) \cdot \frac{x}{28y} = x + 6$$

$$28y \cdot z = x$$

$$21(y+1) \cdot z = x+2$$

$$\begin{array}{lcl} x & \cdot & y \cdot 28 = z \\ (x+2) & \cdot & (y+1) \cdot 21 = z \\ (x+6) & \cdot & (y+2) \cdot 15 = z \end{array} \quad \text{Зон}$$

$$4 \cdot 28xy = 21 \cdot 3(x+2)(y+1)$$

$$4xy = 3(x+2)(y+1)$$

$$21(x+2)(y+1) = 15(y+2)(x+6)$$

$$3(x+2)(y+1) = 5(y+2)(x+6)$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4xy}{5(y+2)(x+6)}$$

$$28xy - 21(x+2)(y+1) = 0$$

$$4(3x+6y+6) = 3(x+2)(y+1)$$

$$28xy = 21(xy + x + 2y + 2)$$

$$12x + 24y + 24 = 3(xy + x + 2y + 2)$$

$$4xy = 3(xy + x + 2y + 2)$$

$$12x + 24y + 24 - 3xy - 3x - 6y - 6 = 0$$

$$4xy = 3xy + 3x + 6y + 6$$

$$3x + 18y + 18 = 3xy$$

$$xy = 3x + 6y + 6 = 3(x + 2y + 2)$$