

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР

2-018

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры “1”, “5” и “6” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно десять, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$ является отрезок длины 1?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.
7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x это все работая

y это все работа

a это время из каждого работи в день

$\frac{y \cdot a}{21 \cdot x}$ - это тот число, который показывают сколько работал один
работи - это обозначим z

$$\frac{y \cdot a}{21 \cdot x} = z$$

$\frac{y \cdot (a+1)}{75-24(x+2)} = \frac{y \cdot (a+1)}{360(x+2)}$ - это будет если бы их было на 2 человека больше

и каждый работал на 1 час в день больше. Это можем обозначить

$$z + \frac{z}{a} \Rightarrow \frac{y \cdot (a+1)}{360(x+2)} = z + \frac{z}{a}$$

$\frac{y \cdot (a+2)}{10-24(x+6)} = \frac{y \cdot (a+2)}{240(x+6)}$ - это будет если бы их было ещё на 4 человека

больше и они работали бы ещё на 1 час в день больше.

это можем обозначить $z + \frac{2z}{a} \Rightarrow \frac{y \cdot (a+2)}{240(x+6)} = z + \frac{2z}{a}$

$$\begin{cases} \frac{y \cdot a}{21 \cdot x} = z \\ \frac{y \cdot (a+1)}{360(x+2)} = z + \frac{z}{a} \\ \frac{y \cdot (a+2)}{240(x+6)} = z + \frac{2z}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y \cdot a}{21 \cdot x} = z \\ \frac{y \cdot (a+1)}{360(x+2)} = \frac{z(a+1)}{a} \\ \frac{y \cdot (a+2)}{240(x+6)} = \frac{z(a+2)}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{y \cdot a}{360(x+2)} = \frac{y \cdot a}{240(x+6)}$$

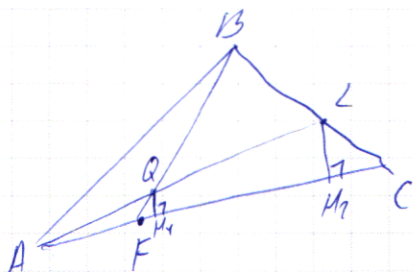
$$240x + 1440 = 360x + 720$$

$$120x = 720$$

$$x = \frac{720}{120}$$

$$x = \underline{\underline{6}}$$

6.



$$AF:FC = 2:7$$

$$QH_1 = 13$$

треугольник AQH_1 похож на треугольник $ALH_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{QH_1}{LH_2}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{13}{LH_2} \quad LH_2 = \frac{13 \cdot 7}{2} = \underline{\underline{45,5}}$$

1. Наибольшее число может быть 200, 199, 198, 197, 196, 195, 194 из промежутка $[151; 200]$

второе 7 целых чисел наибольшее может быть из промежутка $[101; 150]$, но чтобы ~~они~~ ^{разность любых двух выбранных чисел} не делились на 50 должен быть 143, 142, 141, 140, 139, 138, 137.

Третий, 7 целых чисел наибольшее из промежутка $[51; 100]$ и чтобы ~~не~~ ^{разность любых двух выбранных чисел} не делились на 50 должен быть 86, 85, 84, 83, 82, 81, 80

и четвертый из промежутка $[1; 50]$ должен быть 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23

$$\begin{aligned} & 200 + 199 + \dots + 194 + 143 + 142 + \dots + 137 + 86 + 85 + \dots + 80 + 29 + 28 + \dots + 23 = \\ & = 420 + 340 + 340 + 340 + 280 + 280 + 280 + 110 + 110 + 110 + 50 + 48 = 420 + 1020 + 840 + 330 + 98 = \\ & = \underline{\underline{2288}} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. y = 3x^2 - 4x + 2$$

$$17 = 3x^2 - 4x + 2$$

$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 45 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 7}{3} \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$y = 17 \quad y = 1 \quad y = 0$$

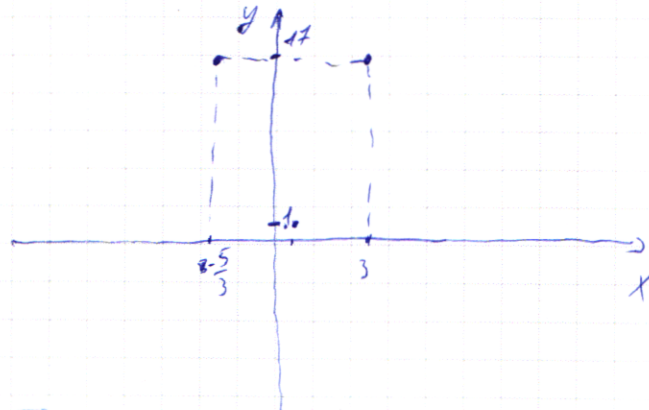
$$1 = 3x^2 - 4x + 2$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 1}{3}$$

$$\frac{D}{4} = 4 - 3 = 1$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{3}$$



$$\sqrt{(3 - (-5/3))^2 + (17 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|ax - a| \leq \sqrt{x-2}$ ~~$x < 2$~~ $x > 2$
 все работы - x когда $\begin{cases} x > 2 \\ 1 \text{ работа} - 1 \text{ час} \end{cases}$

все работы - y 15 день $x > 2$ 1 час
 1 день - $\frac{x}{21}$ ~~$x > 2$~~ ~~$x > 2$~~

$x+2$ $\textcircled{7}$ ~~$\frac{x}{21}$~~ $a+1$

~~$\frac{y}{21}$~~ - 1 день

$x+2$ ~~$\frac{y}{21(x+2)}$~~ $\frac{y}{21}$ $\frac{y}{21x}$ 1 день 1 работа
 $\frac{y}{15(x+2)} = \frac{y}{15+30}$

$x+6$ $a+2$

~~$a+1$~~ x ~~$\frac{y}{21}$~~ 1 день z

$$\frac{y}{21 \cdot x} : 74 = \frac{y}{21 \cdot 21x} - 1 \text{ час}$$

$$\frac{y \cdot a}{501x} - 5 \frac{1}{4} \text{ работ/ч}$$

$$\frac{z(a+1)}{15 \cdot 24 \cdot (x+2)} = \frac{z(a+1)}{360(x+2)} \quad z + \frac{z}{a}$$

$$\frac{z \cdot (a+2)}{10 \cdot 24 \cdot (x+6)} = \frac{z(a+2)}{240(x+6)} \quad z + \frac{2z}{a}$$

$$\begin{cases} \frac{z \cdot a}{501x} = z \\ \frac{z \cdot (a+1)}{360(x+2)} = z + \frac{z}{a} = \frac{z(a+1)}{a} \\ \frac{z \cdot (a+2)}{240(x+6)} = z + \frac{2z}{a} = \frac{z(a+2)}{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{z \cdot a}{501x} = z \\ \frac{z \cdot a}{360(x+2)} = z \\ \frac{z \cdot a}{240(x+6)} = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{360(x+2)}{501x} &= 1 \Rightarrow 360x + 720 = 501x \\ 141x &= 720 \\ x &= \frac{720}{141} \end{aligned}$$

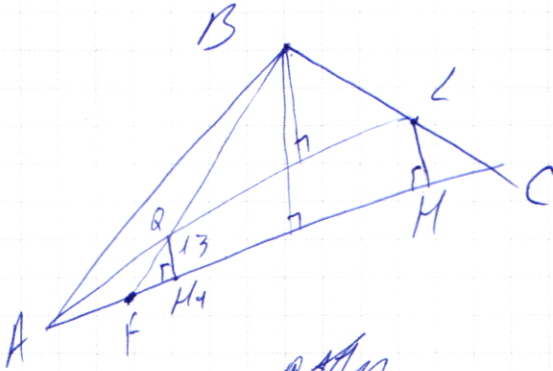
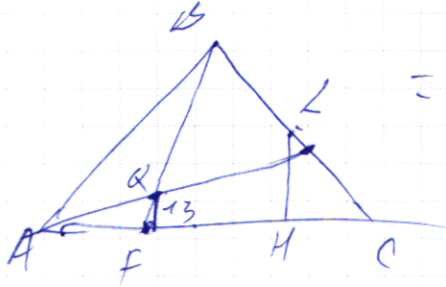
$$\begin{aligned} 240(x+6) &= 360(x+2) \\ 240x + 1440 &= 360x + 720 \\ 120x &= 720 \\ x &= \frac{720}{120} = 6 \end{aligned}$$

аналогично

$$420 + 340 + 340 + 340 + 280 + 280 + 280 + 110 + 110 +$$

$$y = 3x^2 - 4x - 2$$

$$17 = 3x^2 - 4x - 2$$



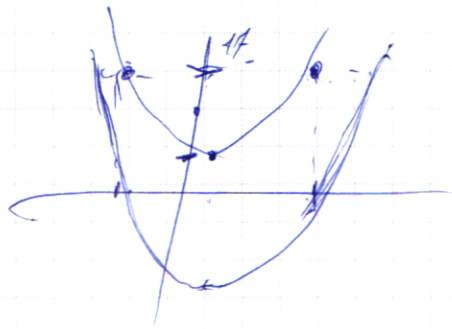
~~8121~~ $+110 + 50 + 48 =$

$340 \cdot 3 = 1020 \quad 1860$

$280 \cdot 3 = 840 \quad 2190$

$330 \quad 2288$

$6,5 - 7 = -0,5$



$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 45 - 49 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 7}{3} \quad x_1 = 3$$

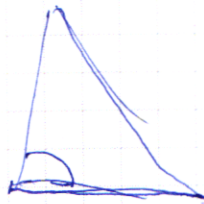
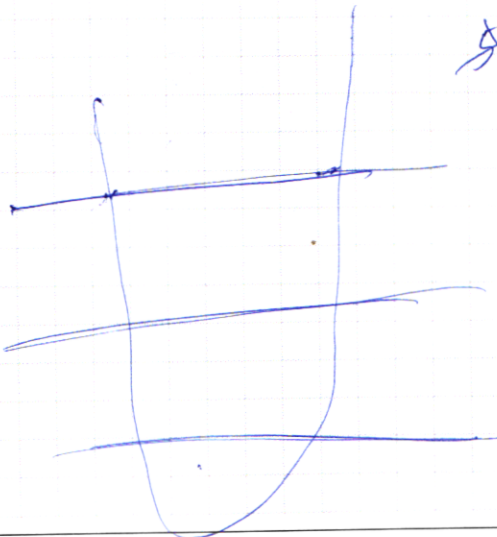
$$x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 - 4 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$y = 3x^2 - 4x + 2$$



~~50, 49, 48, 47, 46, 45, 44~~

~~280, 289, 298, 307, 316, 325, 334~~

~~340, 349, 358, 367, 376, 385, 394, 403, 412, 421, 430, 439, 448~~

~~400 - 24 \quad 23 - 22 = 226, 228, 23, 232, 234, 236~~

~~50 - 48 \quad 48 - 37 \quad 38 - 30 = 7~~

2) 28, 28, 28, 26, 25, 24, 23



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-018

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ___
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



2-018

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)