

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

2-019

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1, x \neq -4$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1 \\ 2x+4 > \sqrt{x+7} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ \sqrt{x+7}-x < 1 \\ 2x+4 \leq \sqrt{x+7} \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} x+7 > x^2+2x+1 \\ 4x^2+16+16x > x+7 \end{cases}$

$$x^2+2x-6=0$$

$$x=-3, x=2$$

$$4x^2+15x+9 \neq 0$$

$$D=9^2$$

$$x = \frac{-15 \pm 9}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x = -3$$

(2) $\begin{cases} x+7 > x^2 \\ x+7 < x^2+2x+1 \\ 4x^2+16+16x > x+7 \end{cases}$

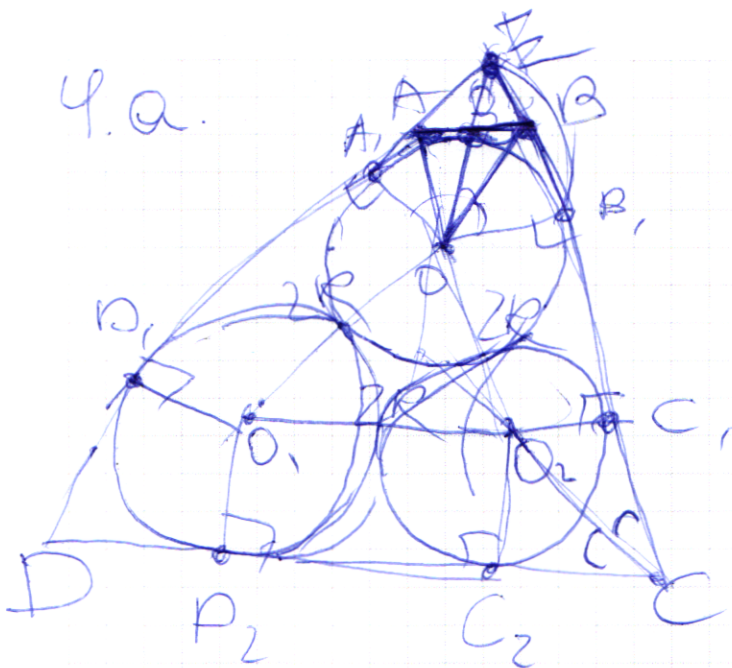
$$x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$$

$$x \in \left[-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right]$$

(1) $x \in (-3; 2)$
 $x \in (-\infty; -3) \cup [-\frac{3}{4}; \infty)$

ответ. $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

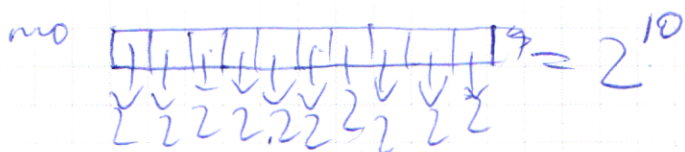
4. а.



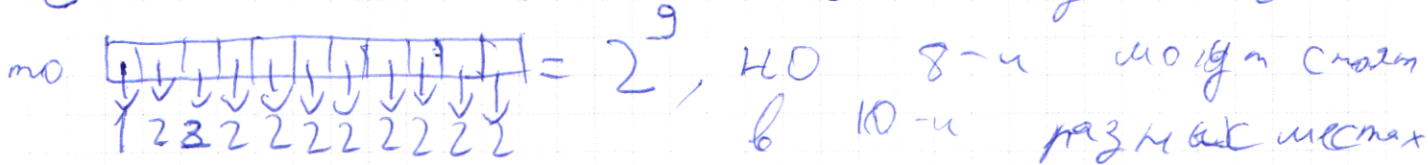
$$\begin{aligned}
 AA_1 = AO &= a \\
 O'B = BO_1 &= b \\
 A_1P_1 = B_1C_1 = O_2C_2 &= 2R \\
 O_1P_1 = O_2C_2 &= d \\
 C_1C = C_2C &= c \\
 a + 2R + d + b + c + 2R &= \\
 - a - b - c - d - 2R &= 12
 \end{aligned}$$

ответ R=6

5. если 8-и стаян с 1-20 го 7-10

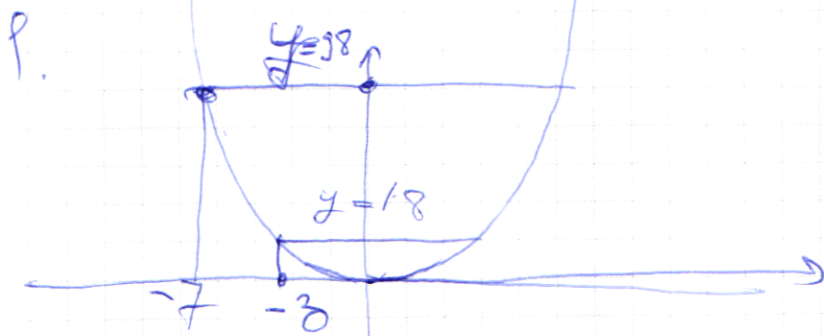


если 8-и не стаян с 1-20 го 7-20



$$2^9 \cdot 10 = 2^{10} \cdot 5$$

ответ $2^{10} \cdot 5 + 2^{10} = 6 \cdot 2^{10}$



$$\begin{aligned}
 2x^2 &= 58 \\
 x &= \pm 7 \\
 2x^2 &= 18 \\
 x &= \pm 3 \\
 2x^2 &= a \\
 x &= \frac{a\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

или $14^2 = (a\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2(-\frac{1}{2}) \cdot 6a\sqrt{2}$
 или $(a\sqrt{2})^2 = 14^2 + 6^2 - 2(-\frac{1}{2}) \cdot 6 \cdot 14$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $196 = a\sqrt{2} = b$ (о значении b)

$$196 = b^2 + 36 + 6b$$

$$b^2 = 196 - 36 + 84$$

$$b^2 + 6b - 160 = 0$$

$$b = \frac{-6 \pm 26}{2} = 10$$

$$\begin{aligned} a\sqrt{2} &= 10 \\ a &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$b^2 = 316$$

$$\begin{aligned} a\sqrt{2} &= \sqrt{316} \\ a &= \sqrt{156} \end{aligned}$$

ответ $a = 5\sqrt{2}$, $a = \sqrt{156}$

4. б. б. $\triangle O_1 O_2 O \sim \triangle DCE \Rightarrow \angle DCE = 60^\circ \Rightarrow$

$$O_2 O \parallel CE$$

$$O_1 O \parallel DE$$

$$O_1 O_2 \parallel DC$$

$$\Rightarrow \angle CO_2 = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 C = 6\sqrt{3}$$

$$AB \parallel BC \Rightarrow \triangle EAB \sim \triangle DCE \Rightarrow AB = AE = EB$$

$$AA_1 = BB_1 = b, AB = a + b = 2b \Rightarrow 3b = R\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{3}$$

ответ $AB = 4\sqrt{3}$

ответ $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$2. g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+7) \geq 1, \quad x > -7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+7}-x > 1 \\ x+7 \geq \sqrt{x+7}-x \end{array} \right.$$

$$x+7 > 1+x^2+2x$$

$$4x^2+16+16x \geq x+7$$

$$x^2+x-6 < 0$$

$$4x^2+15x+9 \geq 0$$

$$D = 5^2$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad x \in (-3; 2)$$

$$x_2 = -3$$

$$D = 225 - 16 \cdot 9 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = -3$$

$$x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; \infty)$$

$$x \in [-\frac{3}{4}; 2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ \sqrt{x+7}-x < 1 \\ x+7 \leq \sqrt{x+7}-x \end{array} \right.$$

$$x+7 > x^2$$

$$x+7 < 1+x^2+2x$$

$$4x^2+16x+16 \leq x+7$$

$$x^2-x-7 < 0$$

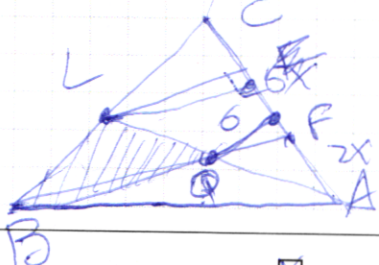
~~$$x \in (-3; 2)$$~~

$$D = 1+28 = 29$$

~~$$x \in (-\infty; 2.3) \cup (2.3; \infty)$$~~

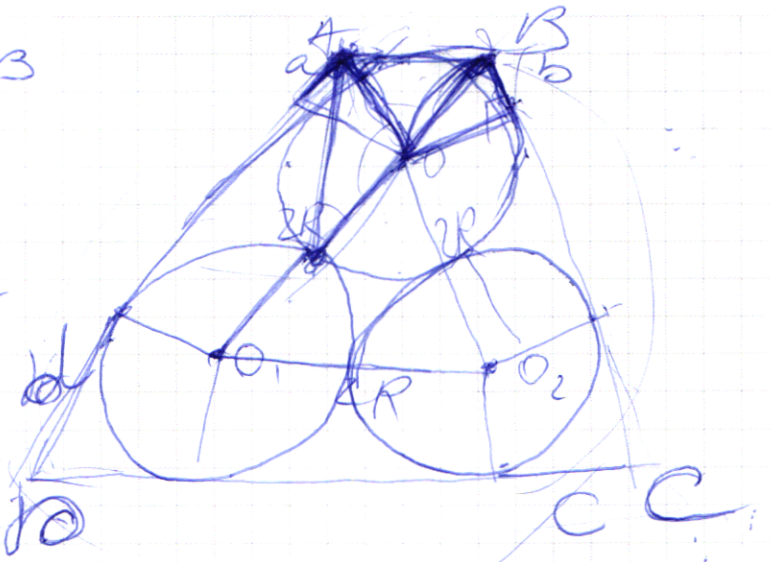
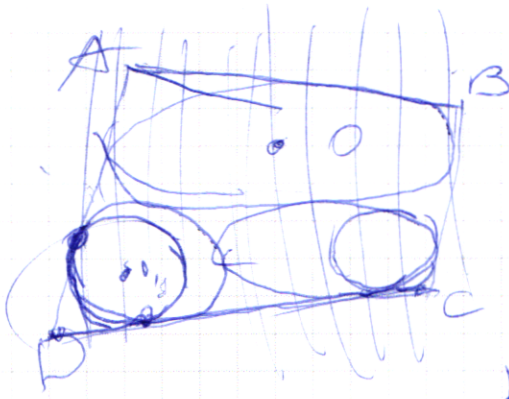
$$x \in [-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}; \frac{3}{4}] \emptyset$$

2. $g'(x) = 30 \sin 3x \cdot \sin 7x + 7 \cos 7x \sin 3x - \sin 9x - 5 \sin 10x$



$$\frac{S_{BOC}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$$

4.



$$d + 2R + a + b + 2R + c - a - b - c - d = 2R - 12$$

$$R = 6$$

$$(a+b)^2 = 2R^2 + b^2 + a^2 - 2\sqrt{R^2 + a^2}\sqrt{R^2 + b^2} \cos \alpha$$

$$a \cdot b + R^2 = \sqrt{R^2 + a^2} \sqrt{R^2 + b^2} \cos \alpha$$

$$b^2 = \sqrt{R^2 + b^2} (\sqrt{R^2 + b^2} - R)$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{R^2 + b^2} - \sqrt{R^2 + b^2} R$$

$$R \sqrt{b^2} + x^2 - 2Rx = R^2 + b^2$$

$$x^2 + 2Rx - b^2 = 0$$

$$D = 4R^2 + 4b^2$$

$$x = \frac{-2R + \sqrt{4R^2 + 4b^2}}{2} = \sqrt{R^2 + b^2} - R$$

$$R^4 + R^2(a^2 + b^2) + a^2 b^2 = 58^2$$

$$b^2 = (\sqrt{R^2 + b^2} + R)(\sqrt{R^2 + b^2} - R)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 10)$$

$$g'(x) = -\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 10x}{2} - \sin 2x - \sin 10x$$

$$-\frac{1}{2} (\sin 2x + \sin 10x) - 3 \sin 2x - \sin 10x = 0$$

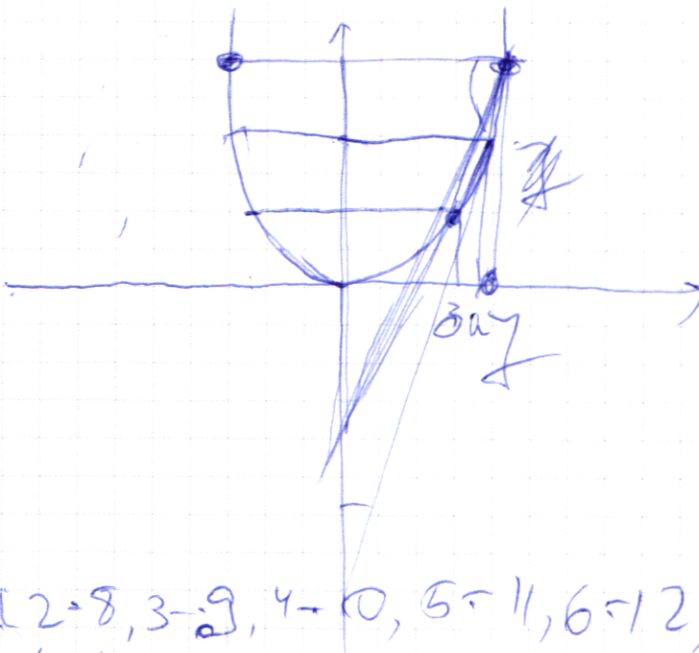
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 10x = 3 \sin x, \quad x \in \text{ок}$$

$$\sin 10x = 3 \sin x$$



1.



[2-8, 3-9, 4-10, 5-11, 6-12, 7-13, 8-14, 9-15, 10-16,
17-17]

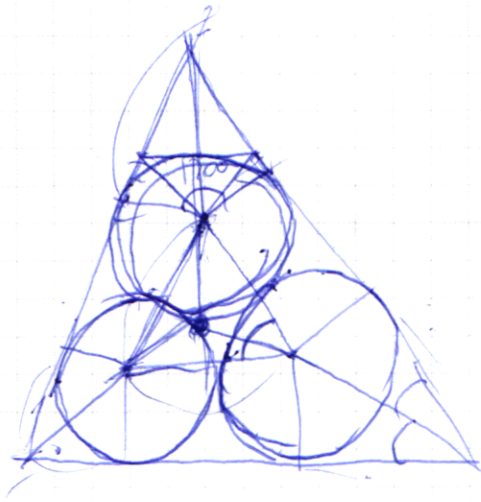
$$196 = a^2 + 36 + 6a$$

$$a^2 + 6a - 160 = 0$$

$$D = 36 + 640 = 676$$

$$a = \frac{-6 + \sqrt{676}}{2} = 10$$

$$a^2 = 196 + 36 + 6 \cdot 14$$



$$R^2 + b^2$$

$$3b = 6\sqrt{3}$$

$$b = 2\sqrt{3}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)