МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР 3-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.

3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-3}$ является отрезок длины 2?

5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “5” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “3” ровно шесть, и они идут подряд.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.

7. Пинокkио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

3- 001

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-001
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. Количество марок x

Количество листов в альбоме y

Если наклеено 15 марок на каждый лист, то сумма наклеенных марок будет 15y, получается что $15y < x$.

Если x это кол. марок, то $\frac{x}{17}$ это количество листов на которых наклеено 17 марок. $\frac{x}{17} \le y-1$

Количество преподнесённых марок 22y, ~~а y~~ а количество марок у Чиполлино x, ~~то~~ значит $22y + x = 900$.

$$\begin{cases} 15y < x \\ \frac{x}{17} \le y-1 \\ 22y + x = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15y < 900-22y \\ x \le 17y-17 \\ x = 900-22y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15y < 900-22y \\ 900-22y \le 17y-17 \\ x = 900-22y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 37y < 900 \\ 39y \ge 917 \\ x = 900-22y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 24\frac{2}{37} \\ y \ge 23\frac{20}{39} \\ x = 900-22y \end{cases} y \in N \Leftrightarrow$$

~~y это натуральное число~~

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \le 24 \\ y \ge 24 \\ x = 900-22y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 24 \\ x = 900 - 22\cdot 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 24 \\ x = 372 \end{cases}$$

Ответ: 372

1. $y_1 = 5x^2$, $y_2 = 125$, $y_3 = 180$, $y_4 = a$

$a = ?$

Координаты точек пересечения $y = 5x^2$ и $y = 125$ являются решениями для обеих уравнений. $y_1 = y_2 = 125 \Rightarrow 5x^2 = 125$

$x^2 = 25$

$x = \pm 5$

~~Поскольку $y = 5x^2$ пересекает $y_2 = 125$ в двух точках,~~

Парабола $5x^2$ пересекает прямую $y = 125$ в точках $A_1\{-5; 125\}$ и $A_2\{5; 125\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

d_1 расстояние между этими точками и есть длина отрезка:

$d_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (где $\{x_1;y_1\}$ координаты A_1, а $x_2;y_2$ координаты A_2)

$d_1=\sqrt{(5+5)^2+(125-125)^2}=\sqrt{10^2}=10$

длина первого отрезка 10.

$y=5x^2$ пересекает $y=180$ в двух точках B_1 и B_2:

$5x^2=180$

$x=\pm 6$

$B_1\{-6;180\}$

$B_2\{6;180\}$

~~d_2 – длина второго отрезка, является расстоянием~~

d_2 – расстояние между точками B_1 и B_2 является длиной второго отрезка

$d_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (где $x_1;y_1$ коорд. B_1, а $x_2;y_2$ коорд. B_2)

$d_2=\sqrt{(6+6)^2+(180-180)^2}=\sqrt{18^2+0}=\sqrt{18^2}=18$

парабола $y=5x^2$ пересекает прямую $y=a$ в точках C_1 и C_2

$5x^2=a$

$x^2=\frac{a}{5}$

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{5}}$

коорд. точек – $C_1\{\sqrt{\frac{a}{5}};a\}$, $C_2\{-\sqrt{\frac{a}{5}};a\}$

длина отрезка $d_3=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (y_1 и x_1 коорд. C_1, x_2 и y_2 коорд. C_2)

$d_3=\sqrt{\left(-\sqrt{\frac{a}{5}}-\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^2+(a-a)^2}=\sqrt{\left(-2\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^2}=\cancel{\sqrt{2\sqrt{\frac{a}{5}}}}\;\left|-2\sqrt{\frac{a}{5}}\right|=2\sqrt{\frac{a}{5}}$

~~Длина каждой стороны треугольника не должна быть меньше суммы длин двух других сторон.~~

~~Отсюда~~ $\cancel{2\sqrt{\frac{a}{5}}<}$ $\cancel{\begin{cases} d_3<d_1+d_2 \\ d_1<d_3+d_2 \\ d_2<d_3+d_1 \end{cases}} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{5}}<10+18 \\ 10<2\sqrt{\frac{a}{5}}+18 \\ 18<2\sqrt{\frac{a}{5}}+10 \end{cases}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} 2\sqrt{\frac{a}{5}}<28 \\ 2\sqrt{\frac{a}{5}}>-8 \\ 2\sqrt{\frac{a}{5}}>8 \end{cases}} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} \sqrt{\frac{a}{5}}<14 \\ \sqrt{\frac{a}{5}}> \end{cases}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$O_2N \perp CD$, $O_1L \perp CD$ $\Rightarrow$ $O_2N \parallel O_1L$, $O_2N = O_1L = r_1$ $\Rightarrow$ O_1O_2NL параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow NL = O_1O_2 = 2r_1$

$O_2M \perp BC$, $O_3E \perp BC$ $\Rightarrow$ $O_2M \parallel O_3E$, $O_2M = O_3E = r_1$ $\Rightarrow$ O_2MEO_3 параллелогр. $\Rightarrow EM = O_2O_3 = 2r_1$

$O_3Q \perp AD$, $O_1P \perp AD$ $\Rightarrow$ $O_3Q \parallel O_1P$, $O_3Q = O_1P = r_1$ $\Rightarrow$ O_3QPO_1 параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow QP = O_3O_1 = 2r_1$

AB, BC, CD, AD касательные $\Rightarrow MC = CN$, $LD = PD$, $AQ = AK$, $KB = BE$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD + BC - AB - CD = \cancel{AQ} + \cancel{PD} + QP + \cancel{BE} + EM + \cancel{MC} - \cancel{BK} - \cancel{KA} -$

$- \cancel{CN} - NL - \cancel{LD} = QP + EM - NL = 2r_1 + 2r_1 - 2r_1 = 2r_1 = 28$

$r_1 = 14$

$r_1 = r_2 = r_3 = 14$

Ответ: 14;

5. Шесть цифр "3" идут подряд, представим что "333333" это одна цифра, тогда у нас будет 12 значные числа. На первом месте могут быть цифры "5", "8", "333333" всего 3 варианта, на втором ~~тоже и т.д.~~ ~~получается что всего вариантов 3^{12}~~ месте уже "цифра" "333333" не может быть, и на других местах тоже, значит для остальных 12 мест вариантов всего двое. Всего вариантов $12 \cdot 2 \cdot 2^{11} = \cancel{73728}$ 24576, Из полученных цифр отсеим те в которых только восьмерки или только пятерки, количество этих чисел $\cancel{26}$ 24

Количество нужных нам чисел $24576 - 24 = \underline{\underline{24552}}$

3 - 001

Если из отрезков составили прямоугольник, то
По закону Пифагора ~~$d_1^2 = d_2^2 + d_3^2$ (d_3 и~~

$$d_2^2 = d_3^2 + d_1^2 \quad (d_1 \text{ и } d_3 \text{ катеты})$$

или

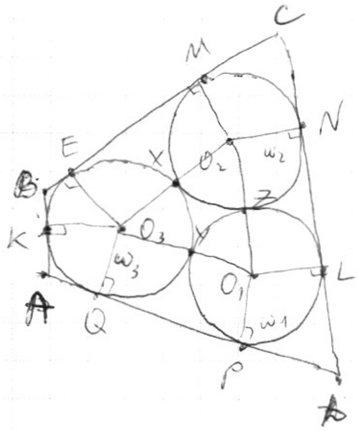
$$d_3^2 = d_2^2 + d_1^2 \quad (d_1 \text{ и } d_2 \text{ катеты а } d_3 \text{ гипотенуза})$$

d_1 не может быть гипотенузой, потому что тогда d_2 стал бы катетом, а $d_2 > d_1$, но ~~в прямоугольн~~ в прямоугольном треугольнике ~~катеты~~ длина катетов всегда меньше длины гипотенузы.

$$\left[\begin{array}{l} d_2^2 = d_3^2 + d_1^2 \\ d_3^2 = d_2^2 + d_1^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 324 = 100 + 4 \cdot \frac{a}{5} \\ 4\frac{a}{5} = 100 + 324 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 280 \\ a = 530 \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \{280; 530\}$

2.



$AD + BC - AB - CD = 28$

ω_1 касается AD в точке P, CD – в точке L;
ω_2 касается CD в точке N, CB – в точке M;
ω_3 касается AB в точке K, BC в точке E, AD в точке Q
r_1 радиус ω_1 $\quad$ O_1 центр ω_1
r_2 радиус ω_2 $\quad$ O_2 центр ω_2
r_3 радиус ω_3 $\quad$ O_3 центр ω_3

$r_1 = r_2 = r_3$

$r_1 = r_2 = r_3 = ?$

ω_1 кас. ω_2
O_1, O_2 центры ω_1 и ω_2
~~Z это точка касания~~

~~O_2~~ $O_1O_2 = r_1 + r_2 = 2r_1$

аналогично $O_1O_3 = r_1 + r_3 = 2r_1$
$O_2O_3 = r_2 + r_3 = 2r_1$

CD касается ω_2 в точке $N \Rightarrow O_2N \perp CD$
аналогично $O_2M \perp BC$
$O_3E \perp BC$
$O_3K \perp AB$
$O_3Q \perp AD$
$O_1L \perp CD$
$O_1P \perp AD$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 3
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

3 - 001

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: 24552

4. $|ax-a| \le \sqrt{x-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (ax-a)^2 \le x-3 \\ x-3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \le x-3 \\ x \ge 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2x^2 - (2a^2+1)x + (a^2+3) \le 0 \\ x \ge 3 \end{cases}$

$a^2x^2 - (2a^2+1)x + (a^2+3) \le 0$

$D = (2a^2+1)^2 - 4a^2(a^2+3) = 4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^4 - 12a^2 = 1 - 8a^2$

$x_1 = \dfrac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$

$x_2 = \dfrac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$

1) Если $\dfrac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} \ge 3$

$x \in \left[\dfrac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}; \dfrac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}\right]$

$\dfrac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} - \dfrac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} = 2$

$\dfrac{2\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} = 2$

$\dfrac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2} = 2$

$\sqrt{1-8a^2} = 2a^2$

$\begin{cases} 1-8a^2 = 4a^4 \\ 1-8a^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^4 + 8a^2 - 1 = 0 \\ 8a^2 \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{4(a^2 - \frac{2}{3})(a^2 + \frac{-8}{3})} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{a_1^2 = a_2^2} \\ 8a^2 \le \frac{1}{8} \end{cases} a^2 = \dfrac{\sqrt{80}-8}{8} \le \frac{1}{8} \Rightarrow a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{80}-8}{8}}$ (не удовл.)

(потому что если $a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{80}-8}{8}}$, то $\dfrac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} < 3$)

$4a^4 + 8a^2 - 1 = 0$

$x = a^2$

$4x^2 + 8x - 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 64 + 16 = 80$

$x_1 = \dfrac{-8-\sqrt{80}}{8}$ (не удовл. $a^2 \ge 0 \Rightarrow x_1 \ge 0$)

$x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{80}}{8} \ge 0$ уд.

$a^2 = x_2$, $a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{80}-8}{8}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2) Если $\frac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left[3; \frac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}\right]$

$\frac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} - 3 = 2$

$\frac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}-10a^2}{2a^2} = 0$

$2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}-10a^2=0$

$1+\sqrt{1-8a^2}-8a^2=0$

$\sqrt{1-8a^2}+(1-8a^2)=0$

$\sqrt{1-8a^2}\left(1+\sqrt{1-8a^2}\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{1-8a^2}=-1 \text{ (не удовл. } \sqrt{1-8a^2}\geq 0) \\ \sqrt{1-8a^2}=0 \text{ (удовл.)}\end{array}\right.$

$\sqrt{1-8a^2}=0$

$1-8a^2=0$

$a^2=\frac{1}{8}$

$a=\frac{1}{\sqrt8}=\frac{\sqrt8}{8}=\frac{2\sqrt2}{8}=\frac{\sqrt2}{4}$

Если $a=\frac{\sqrt2}{4}$, то $\frac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}=1\frac{1}{4}<3 \Rightarrow a=\frac{\sqrt2}{4}$ (удовл.)

Ответ: $a=\frac{\sqrt2}{4}$.

7. Предположим Пиноккио выбрал первые шесть цифр каждого промежутка, тогда сумма этих цифр составит $1+2+3+4+5+6+41+42+43+\ldots+121+122+123+124+125+126=1524$. Чтобы цифры из второго промежутка не равнялись на цифры первого промежутка, ~~каждую~~ прибавим каждой цифре 6, ~~увеличим~~ сумма из за этого возрастёт на 36. ~~По той же~~ Чтобы цифры из третьего промежутка не равнялись на цифры из I и II промежутка, прибавим каждой из них 12. Сумма возрастёт на $12\cdot6=72$. ~~по то~~ Чтобы цифры III промежутка не равнялись на цифры I, II и III промежутков, каждой прибавим 18. Сумма возрастёт на $18\cdot6=108$. Итого $1524+36+72+108=1740$

Ответ: 1740.

3-001

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

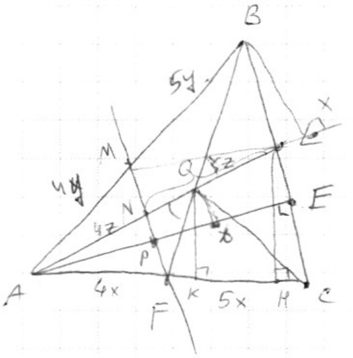
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$F \in AC$

$L \in BC$

$\frac{AF}{FC} = \frac{4}{5} \Rightarrow AF = 4x,\ FC = 5x$

$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAL}} = \frac{1}{25}$

$QK \perp AC,\ QK = 12$

$LH \perp AC$

$LH = ?$

$\left.\begin{array}{l} QK \perp AC \\ LH \perp AC \end{array}\right| \Rightarrow QK \parallel LH$

через точку F проводим $FM \parallel BC$, $FM \cap AL = N$

По теореме Фалеса $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{AF}{FC} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow AM = 4y,\ MB = 5y \\ \frac{AF}{FC} = \frac{AN}{NL} \Rightarrow AN = 4z,\ NL = 5z \end{array}\right.$

$MF \parallel BC \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \angle AMF = \angle ABC \\ \angle AFM = \angle ACB \end{array} \right| \Rightarrow \triangle AMF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MF}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{4y}{9y} = \frac{4}{9} \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow \frac{S_{\triangle AMF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4^2}{9^2} = \frac{16}{81} \Rightarrow \frac{S_{MBCF}}{S_{ABC}} = \frac{65}{81}}$

$\cancel{AE \perp BC}$

~~$MF \parallel BC \Rightarrow$ по теореме Фалеса~~

$\left.\begin{array}{l} \angle QKA = \angle LHA = 90° \\ \angle LAC \text{ общий} \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (I признак) $\triangle AQK \sim \triangle ALC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AL}{AQ} = \frac{LH}{QK}$

$LH = \frac{AL \cdot QK}{AQ}$

$BX \perp AQ$, $BX = h_{QBL}$

$S_{BLQ} = \frac{1}{2} QL \cdot h_{QBL}$

$S_{ABL} = \frac{1}{2} h_{QBL} \cdot AL$

$\frac{AN}{NL} = \frac{4}{5} \Rightarrow$

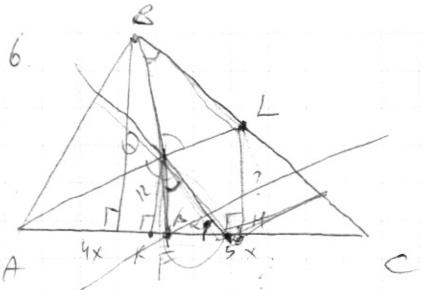
$\frac{S_{BQL}}{S_{ABL}} = \frac{QL}{AL}$

$\Rightarrow \frac{AN}{AL} = \frac{4}{5}$

$\frac{AN + NQ}{AL} = ?$

$\left.\begin{array}{l} \angle NQF = \angle BQL \\ \angle NFQ = \angle QBL \end{array}\right| \Rightarrow \triangle NQF \sim \triangle BQX \Rightarrow \frac{BQ}{QF} = \frac{LQ}{NQ}$

6



$AF : FC = \frac{4x}{5x}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{25}$

$AC = 4x + 5x = 9x$

$QK = 12$

$LH = ?$

$\cancel{S_{\triangle BAF} = \frac{1}{2} h \cdot AF = \frac{1}{2} h \cdot 4x}$

$\cancel{S_{\triangle BAC} = \frac{1}{2} h \cdot FC = \frac{1}{2} h \cdot 5x}$

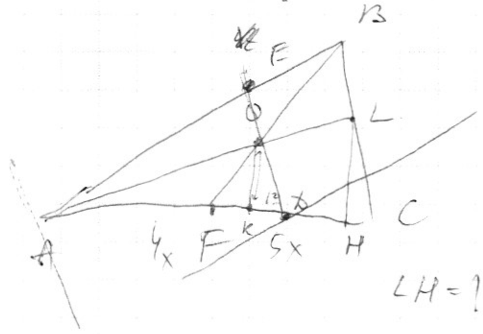
$\cancel{\frac{S_{\triangle BFC}}{S_{\triangle}}}$ $S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2} h \cdot 5x = \frac{1}{2} h \cdot 5x$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h \cdot AC = \frac{1}{2} h \cdot 9x$

$S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} h \cdot AF = \frac{1}{2} h \cdot 4x$

$\frac{S_{BFC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{9}$ $S_{BFC} = \frac{5 S_{ABC}}{9}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{25}$ $S_{BQL} = \frac{S_{ABC}}{25}$



$LH = ?$

$QD \parallel BC$

$\cancel{\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{25 \cdot 5}{9} = \frac{125}{9}}$

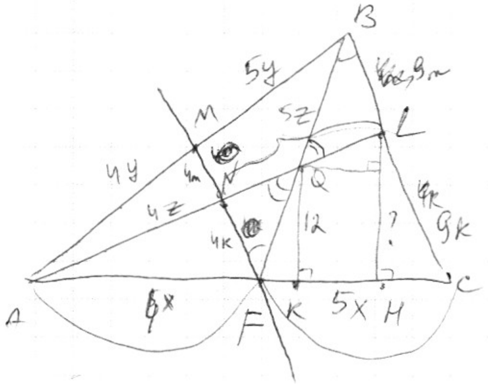
$\cancel{\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{9}{25 \cdot 5} = \frac{125}{9}}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{9}{25 \cdot 5} = \frac{9}{125}$

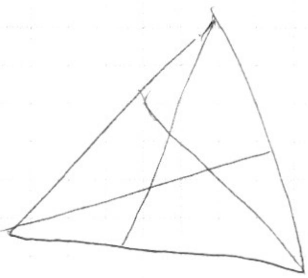
A

(теор. Фалеса)

$$\boxed{\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}}$$



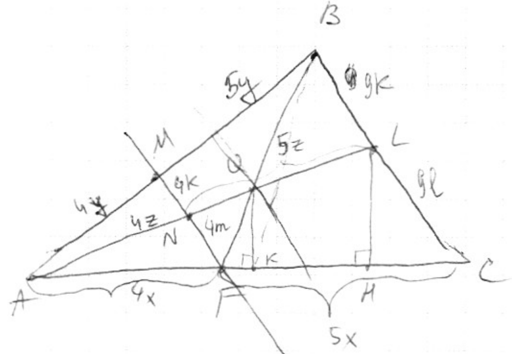
$\triangle NQF \sim \triangle FQL$



$\cancel{\frac{AQ}{LQ}}$

$\frac{AL}{AQ}$

$\frac{AL}{AQ}$



3-001

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. x - кол. марок.

y - кол. листов в альбоме

$15y < x$

$\frac{x}{17} \le y-1$

$$\begin{cases} 15y < x \\ \frac{x}{17} \le y-1 \\ 22y + x = 900 \end{cases} \Rightarrow x = ?$$

$22y + x = 900 \Rightarrow x = 900 - 22y$

$15y < 900 - 22y$

$37y < 900$

$y < 24,3$

$\frac{900-22y}{17} \le y-1$

$900 - 22y \le 17y - 17$

$39y \ge 917$

$y \ge 23,5$

$23,5 \le y \le 24,3$

1 40 41 80 81 120 121 160

$y = 24$

$x = 900 - 22y = 372$

4. $|ax - a| \le \sqrt{x-3}$

$$\begin{cases} (ax - a)^2 \le x - 3 \\ x - 3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2(x-1)^2 \le x-3 \\ x \ge 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \le x - 3 \\ x \ge 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2x^2 - (2a^2+1)x + a^2 + 3 \le 0 \\ x \ge 3 \end{cases}$$

$a^2x^2 - (2a^2+1)x + (a^2+3) \le 0$

$D = (2a^2+1)^2 - 4a^2(a^2+3) = 4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^4 - 12a^2 = 1 - 8a^2$

$x_1 = \frac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$ $x_2 = \frac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$

$x_1 = 1 + \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} < 3$ $x \in (x_1; x_2) \Rightarrow x_2 - x_1 = 2$

$\frac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} - \frac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} = \frac{2\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} = \frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2} = 2$

$\sqrt{1-8a^2} = 2a^2$

$1 - 8a^2 = 4a^4$

$4a^4 + 8a^2 - 1 = 0$

$4(a^4 + 2a^2 - \frac{1}{4}) = 0$

$x_1 + x_2 = -2$

$x_1 x_2 = -\frac{1}{4}$

$\frac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a} \ge 3 =$

$= \frac{\sqrt{80}-8}{4} + 1 - \sqrt{1-(\sqrt{80}-8)} = \sqrt{80}\,0,4 + 1 - \sqrt{\ }$

$= 1 + \frac{h}{1} =$

$= \frac{1 - \sqrt{1 - 1 + \frac{h}{1}}}{}$

$\frac{8}{1} = \frac{91}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

1.

$y=5x^2$

$y=125$

$y=180$

$y=a$

$y=5x^2$ пересекает $y=125$ где координаты x и y совпадают

$5x^2=125$

$x^2=25$

$x=\pm5$ $y=125$

$A_1\{5;125\}$

$A_2\{-5;125\}$

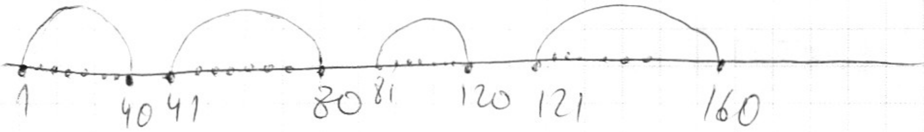
$y=180$

$y=5x^2$

$5x^2=180$

$x^2=36$

$x=\pm6$



$A_1\{x_1;y_1\}$ $A_2\{x_2;y_2\}$

расстояния отрезка

$d_A=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=$

$=\sqrt{(-5-5)^2+0}=$

$=\sqrt{-10^2}=\sqrt{100}=10$