3-002

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 3 - 002

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

3-002

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

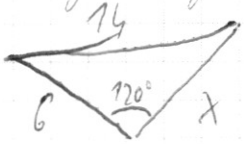
3-002
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

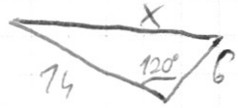
1. Подставляя 98 и 18 в заданную функцию, получаем, что длина отрезков будет $2\cdot\sqrt{\frac{98}{2}}=14$ и $2\cdot\sqrt{\frac{18}{2}}=6$

Возможны два случая:

I 

$\Rightarrow$ По теореме косинусов $x^2+6^2+6x=14^2$

$x^2+6x-160=0 \Rightarrow x=10$

II 

$\Rightarrow x^2=14^2+6^2+6\cdot 14=316 \Rightarrow x=\sqrt{316}$

Зная также, что $a=2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2$ получаем два ответа: $a=50$ и $a=158$

2. Выведем формулу $\sin x\cdot\sin y$:

$$\left[\begin{array}{l}\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y\\ \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y\end{array}\right. \Rightarrow \sin x\sin y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$g(x)=\sin 3x\sin 7x-\sin^2x+\cos^2 5x+4=\frac{\cos 4x-\cos 10x}{2}-\sin^2x+\cos^2 5x+4=$$

$$=\frac{2\cos^2 2x-1-2\cos^2 5x+1}{2}-\sin^2 x+\cos^2 5x+4=\cos^2 2x-\sin^2 x+4=$$

$$=\cos^2 2x+\left(\frac{1-2\sin^2 x}{2}\right)-\frac{1}{2}+4=\cos^2 2x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{7}{2}$$

Нетрудно догадаться, что $g(max)=1+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=5$, а чтобы найти $g(min)$ предположим, что $\cos 2x\equiv y \Rightarrow \cancel{g}\ g=y^2+\frac{y}{2}+\frac{7}{2}$ $\quad g'=2y+\frac{1}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{4}$

Подставляя значение y в функцию, получаем $g(min)=\frac{55}{16}$ Ответ: $5,\ \frac{55}{16}$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

3. Поскольку семь "8" должны идти подряд, то можно привести задачу к иной задаче, а именно: Найти количество 11-значных чисел, из которых одно число a (семь "8"), а остальные "0" и "7", причем каждая из них появляется хотя бы один раз. Чтобы решить новую задачу покажем их расположения:

2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

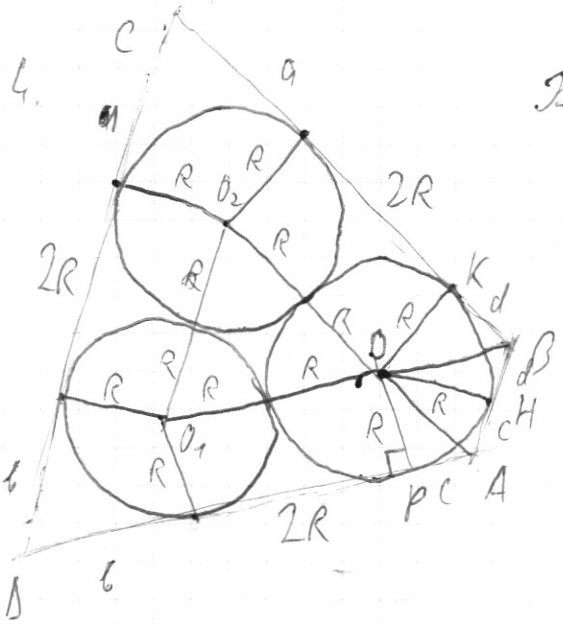
— число "a" $\overset{10}{000\ldots00}$ — числа содержащие только "a" и "7" =

"a" или "7"   "a", "7" или "0"

$$= 2\cdot 3^{10} - 1 - 11 = 2\cdot 3^{10} - 12 = 118098 - 12 = 118086$$

Ответ: 118086

4.



Решим задачи, используя чертеж:

$AD = c+b+2R \quad BC = a+d+2R \quad CD = b+c+2R \quad AB = c+d$

$AD+BC-AB-CD = c+b+2R+a+d+2R-(c+d)-(b+c+2R) =$

$= 2R = 12 \Rightarrow R = 6$

Из равенства соответствующих треугольников:

$\angle POA = \angle AOH$ и $\angle BOC = \angle KOB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KOP = 2\angle AOB$

Поскольку окружности касаются сторон, получившиеся четырехугольники являются прямоугольниками, то есть $\angle O_1OP = \angle O_2OK = 90°$, также $\triangle OO_1O_2$ равносторонний $\Rightarrow \angle O_2OO_1 = 60° \Rightarrow \angle KOP = 360° - \angle O_2OO_1 - \angle O_1OP - \angle O_2OK =$ $= 120° \Rightarrow \angle AOB = 60°$

Изучим $\triangle AOB$: $S_{AOB} = \dfrac{OH\cdot AB}{2} = \dfrac{AO\cdot OB\cdot \sin AOB}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = \frac{AO\cdot OB \sin AOB}{OH(R)} = \frac{58\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 6} = \frac{29\sqrt{3}}{6}$$

Ответ: 6, 60°, $\dfrac{29\sqrt{3}}{6}$.

3-002

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\lg_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ Чтобы решить задачу оценим $\sqrt{x+7}-x$ и $\sqrt{x+4}$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1, \text{ когда } x \in [-7;2) \\ x+4 > 1, \text{ когда } x \in (-3;+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+7}-x < 1, \text{ когда } x \in (2;+\infty) \\ x+4 < 1, \text{ когда } x \in (-4;-3) \end{cases} \end{array}\right.$$

При разных областях этих двух функций $\lg_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) < 0$, что явно не подходит.

Как видно оба функции должны превышать 1, то-есть можно преобразовать логарифму: $\lg_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \equiv x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \Rightarrow 2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$4x^2+16x+16 \geq x+7 \qquad 4x^2+15x+9 \geq 0$

$$x = \frac{-15+\sqrt{225-144}}{8} = -0{,}75$$

(В случае минуса $x=-3 \notin (-3;2)$) $\Rightarrow x \in [-0{,}75;2)$

Ответ: $[-0{,}75;2)$.

7. Пронумеруем числа в пяти промежутках:

$[1;45] \equiv a_1 \ldots a_{45} \quad [46;90] \equiv b_1 \ldots b_{45} \quad [91;135] \equiv c_1 \ldots c_{45}$

$[136;180] \equiv d_1 \ldots d_{45} \quad [181;225] \equiv e_1 \ldots e_{45}$

Нетрудно заметить, что $a_n \equiv b_n \equiv c_n \equiv d_n \equiv e_n \pmod{45}$

Числа нужно выбирать, так чтобы их индексы не повторялись, а чтобы выбрать числа с наименьшей суммой будем выбирать $e_1 \ldots e_6$, $d_7 \ldots d_{12}$, $c_{13} \ldots c_{18}$, $b_{19} \ldots b_{24}$, $a_{25} \ldots a_{30}$ (Продолжение на странице 4)

Теперь надо просто сосчитать полученную сумму, а чтобы сделать это легко вспомним, что $e_n = 45 \cdot 4 + n$, $d_n = 45 \cdot 3 + n$, $c_n = 45 \cdot 2 + n$, $b_n = 45 + n$, $a_n = n$

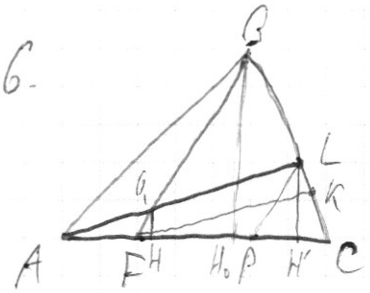
$e_1 + e_2 + \ldots + e_6 + d_7 + \ldots + d_{12} + c_{13} + \ldots + c_{18} + b_{19} + \ldots + b_{24} + a_{25} + \ldots + a_{30} =$

$= 6 \cdot 45 \cdot 4 + 6 \cdot 45 \cdot 3 + 6 \cdot 45 \cdot 2 + 6 \cdot 45 \cdot 1 + (1 + \ldots + 30) = 6 \cdot 450 + \frac{30 \cdot 31}{2} =$

$= 3165$

Ответ: 3165.

6.



Внимание! Сложное объяснение!

Назовем h_Q расстояние Q от BC и h_F расстояние F от BC. Также проведем $FK \parallel QL$ и $LP \parallel BF$

$$S_{BQL} = \frac{BL \cdot h_Q}{2} \qquad S_{BFC} = \frac{FC \cdot BH_0}{2} = \frac{FC}{AC} \cdot \frac{AC \cdot BH_0}{2} = \frac{5}{7} S_{ABC}$$

$$S_{BFC} = \frac{h_F \cdot BC}{2} \qquad \frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{BL \cdot h_Q}{BC \cdot h_F} = \frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{12}$$

$$\Delta BQL \sim \Delta BFK \Rightarrow \frac{h_Q}{h_F} = \frac{BL}{BK}, \quad \Delta CKF \sim \Delta CAL \Rightarrow \frac{CK}{KL} = \frac{5}{2}, \ CK = \frac{5}{7} CL$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{7}{12} = \frac{BL \cdot h_Q}{BC \cdot h_F} = \frac{BL^2}{BC \cdot (BC - CK)} = \frac{(BC - CL)^2}{BC^2 - \frac{5}{7} BC \cdot CL} = \frac{7}{12}$$

$$12 BC^2 - 24 BC\,CL + 12 CL^2 = 7 BC^2 - 5 BC \cdot CL$$

$$5 BC^2 - 19 BC \cdot CL + 12 CL^2 = 0 \Rightarrow BC = CL \left(\frac{19 + \sqrt{361 - 240}}{10} \right) = 3\, CL$$

~~$\Delta CLP \sim \Delta CBF$~~ $\Delta CLP \sim \Delta CBF \Rightarrow \frac{CL}{BC} = \frac{CP}{CF} = \frac{1}{3}$

$$\Delta AQF \sim \Delta ALP \Rightarrow \frac{HQ}{H'L} = \frac{AF}{FP} = \frac{\frac{2}{5} CF}{CF - CP} = \frac{\frac{2}{5} CF}{CF(1 - \frac{1}{3})} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H'L = \frac{5 HQ}{3} = 10$$

Ответ: 10.

3 - 002

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

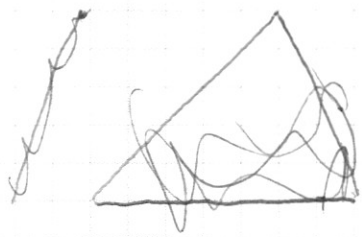
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

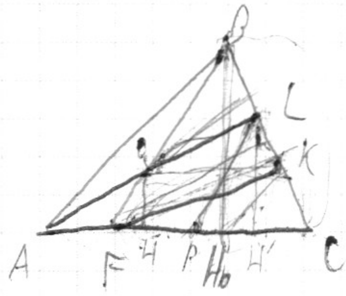
3 - 002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\frac{S_{BQL}}{S_{BAL}} = \frac{5}{12}$

$\frac{BL \cdot h_a}{BC \cdot h_F} = \frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{7}{12}$

$\frac{BL \cdot h_a}{BK \cdot h_F} = \frac{7}{12}$

$LK = \frac{2KC}{7}$

$\frac{BL^2}{BC \cdot BK}$

$\frac{FC}{AF} = \frac{5}{2}$

$S_{BFC} = \frac{5}{7} S_{ABC} = h_F \cdot BC$

$\frac{BL}{BC} \cdot \frac{BL}{BK} = \frac{7}{12}$

$\frac{(BC-CL)^2}{BC\left(BC - \frac{5CL}{7}\right)} = \frac{5}{12}$

$\frac{BL \cdot h_a}{BC \cdot h_F} = \frac{7}{12}$

$12BC^2 - 24BC \cdot CL + 12CL^2 = 5BC^2 - \frac{25BC \cdot CL}{7}$

$\frac{h_a}{h_F} = \frac{BL}{BK} = \frac{BL}{BC - \frac{5}{7}CL}$

$7BC^2 - \frac{143}{7}BC \cdot CL + 12CL^2 = 0$

$\frac{(BC-CL)^2}{BC^2 - \frac{5}{7}BC \cdot CL} = \frac{7}{12}$

$49BC^2 - 143BC \cdot CL + 84CL^2 = 0$

$BC = x \cdot CL$

$12BC^2 - 24BCCL + 12CL^2 = 7BC^2 - 5BC \cdot CL$

$5BC^2 - 19BC \cdot CL + 12CL^2 = 0$

$CH_0 = x \cdot CH'$

$BC = \frac{13CL}{10} =$

$CF = x \cdot CP$

$\frac{AF}{FP} = \frac{AF}{\frac{2}{3}CF} = \frac{3}{5} = \frac{h}{h'}$

$FP = (x-1)CP$

$\frac{CL}{BC} = \frac{CP}{CF} = \frac{1}{3}$

$h' = 10$

$\frac{h}{h'} = \frac{2}{7(x-1)}$

$CF = 3CP$ $FP = \frac{2}{3}CF$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\quad \sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin 3x \sin 7x = \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} = \frac{2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 5x + 1}{2} =$

$= \cos^2 2x - \cos^2 5x$

$g(x) = \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 = \cos^2 2x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{7}{2} = y^2 + \frac{y}{2} + \frac{7}{2}$

$g'(y) = 2y + \frac{1}{2} = 0 \quad y = -\frac{1}{4} \Rightarrow g(min) = \frac{55}{16} \quad g(max) = 5$

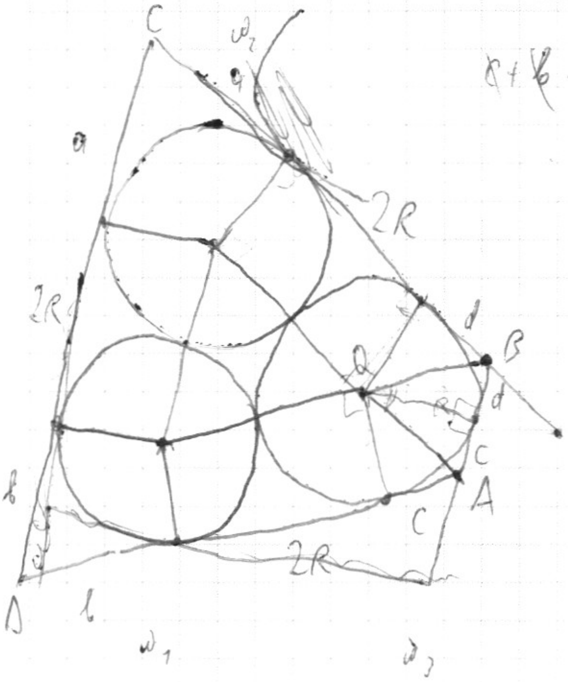
3. | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | $- \boxed{\quad} \cdot 2C_{11}^1 =$

$\times \frac{19683}{3}$ $\quad$ 6561

$\times \frac{59049}{2}$ $\quad$ 243 $\quad$ 19683

729 $\quad$ 59049

$118098 - 22 = 118076$ $\quad$ 2187



$\cancel{a} + \cancel{b} + \cancel{2R} + d + a + 2R - \cancel{(c+d)} - \cancel{(a+b+2R)} = 12$

$R = 6$

$\angle = 60°$

$\frac{6 \cdot AB}{2} = \frac{58 \cdot \sin 60}{2}$

$AB = \frac{58\sqrt{3}}{6} = \frac{29\sqrt{3}}{3}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

3-002

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ $\qquad$ $\left[\begin{array}{l} x+4 \geq \sqrt{x+7}-x, \quad x\in(-\cancel{3};2) \\ \cancel{x+4 \leq \sqrt{x+7}-x} \end{array}\right.$

$(x+4) > 0$

$\sqrt{x+7} = x$ $\qquad$ $\cancel{x>-4}$

$x^2-x-7=0$ $\qquad$ $x\in\left(-4;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \cup x\neq 2$

$\cancel{1+28}$ $x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

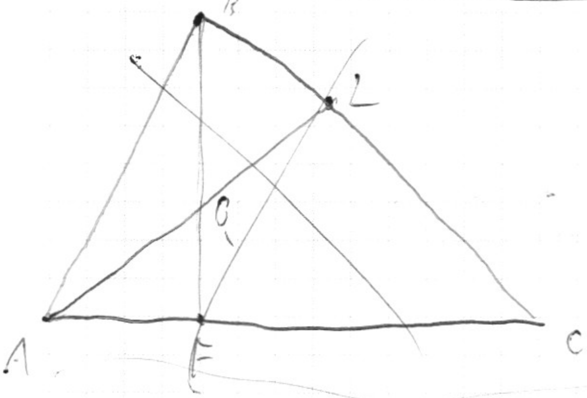
$4x^2+16x+16 \geq x+7$

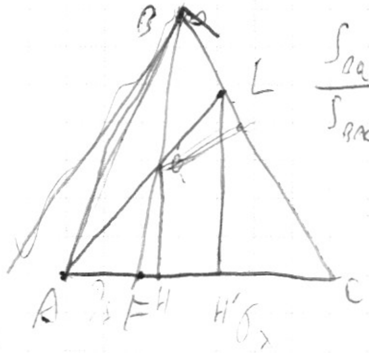
$4x^2+15x+9 \geq 0$

$\cancel{D=225-144=369}=81$

$x=\frac{-15\pm 9}{8}=-0{,}75$

$x\in[-0{,}75;2)$



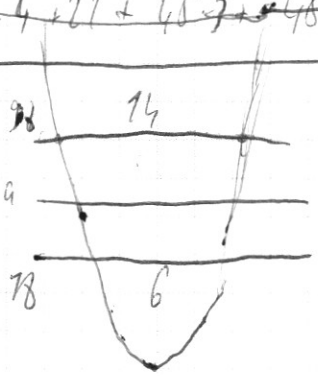


$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}}=\frac{5}{12}$

$e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+d_7+d_8+d_9+d_{10}+d_{11}+d_{12}+c_{13}+\ldots+c_{18}+b_{19}+\ldots+b_{24}+a_{25}+\ldots+a_{30}=$

$\cancel{6(45\cdot 4)+(1+2+3+4+5+6)}$ $\qquad$ $450\cdot 6+(1+\ldots+20)=3165$ $\qquad$ $15\cdot 81=$

$\cancel{45\cdot 4+21+45\cdot 7+45\cdot 10+(1+\ldots+20)}=915$



$6^2+x^2-12x\cdot\cos 120=14^2$ $\qquad$ $\cancel{14^2 6^2}$

$x^2+6x-160=0$ $\qquad$ $14^2+6^2+6\cdot 14=x^2$

$\cancel{640+108=748}$ $\qquad$ $x^2=316$

$x=\sqrt{316}$

$x^2+6x-160=0$ $\quad$ 17 $\quad$ 17

$x=10 \Rightarrow a=50$