

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

3-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 $\log_{\sqrt{x+3}} - x (x+5) \geq 1$

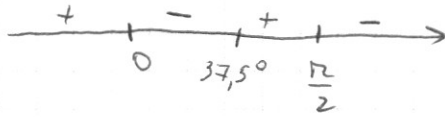
$$\left\{ \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \\ x+5 > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x \neq 1 \\ x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \\ x > -5 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - x < 1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3} - x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x \in (1; +\infty) \\ x \in [-3; -2] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \in [-3; 1) \\ x \in [-2; +\infty) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

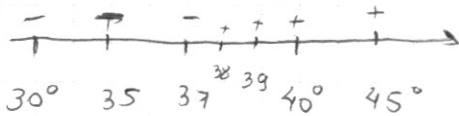
$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [-3; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x \in [-3; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x \in [-2; 1) \end{array} \right.$$

$x \in [-2; 1)$

② $g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$
 $g'(x) = 5 \cos 5x \sin 9x + 9 \sin 5x \cos 9x - 2 \sin 7x \cdot 7 \cos 7x + 2 \cos x \sin x = 0$
 $x = \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$



$g(0) = -4$
 $g(\frac{\pi}{2}) = -3$



$g(37,5^\circ)$ или $g(37,5) \approx 3,5$

$\min(g) = -4$
 $\max(g) = -3$

⑦

1, 2, 3, 4, 5	→	6	7	8	9	10
36, 37, 38, 39, 40	→	46	47	48	49	50
71, 72, 73, 74, 75	→	86	87	88	89	90
106, 107, 108, 109, 110	→	126	127	128	129	130
141, 142, 143, 144, 145	→	141	142	143	144	145

$S_1 = 15 + 5 \cdot 5 = 40$

$S_2 = 190 + 5 \cdot 10 = 240$

$S_3 = 365 + 5 \cdot 15 = 440$

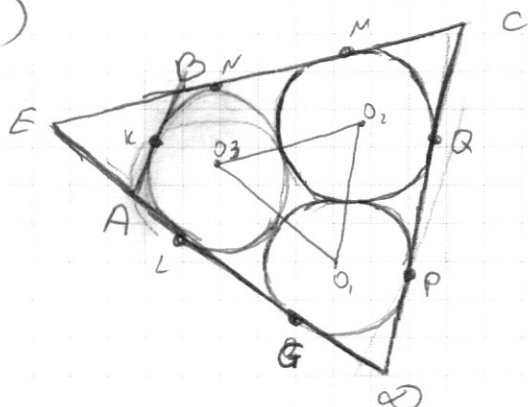
$S_4 = 540 + 5 \cdot 20 = 640$

$S_5 = 715$

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 2075$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4)



$$O_1 O_2 = O_2 O_3 = O_1 O_3 = 2R$$

$$LG \perp GP \equiv a$$

$$KA = AL \equiv b$$

$$BK = BN \equiv c$$

$$CM = CQ \equiv d$$

$$AD + BC - AB - CD = b + LG + a + c + NM + d -$$

$$- b - c - d - QP - a = LG + NM - QP = 0$$

Так как $O_2 M \perp BC$, $O_3 N \perp BC$. $O_2 M = O_3 N = R$

$$\Rightarrow MN = O_2 O_3 = 2R \quad LG = O_1 O_3 = 2R \quad QP = O_2 O_3$$

$$LG + MN - QP = 2R = 0$$

$$R = \underline{\underline{5}}$$

$$O_3 \equiv O \quad EC \parallel O_2 O_3 \quad E \perp \parallel O_1 O_3$$

$$\angle O_2 O_3 O_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle CED = 60^\circ$$

$$EN = EL \quad \angle NEL = 60^\circ \Rightarrow \triangle ENL \text{ - равносторонний}$$

$$\Rightarrow EN = NL \quad \angle LO_3 N = 120^\circ$$

$$\angle NBK + \angle LAK = 180 - \angle KBE + 180 - \angle KAE =$$

$$= \angle BEA + 180 = 240^\circ = \angle B + \angle A$$

$$\angle NBK \equiv \angle B \quad \angle LAK \equiv \angle A$$

$$\triangle OAL = \triangle AOK \quad \Rightarrow \angle KAO_3 = \angle O_3 AL = \frac{\angle A}{2}$$

$$\triangle KO_3 B = \triangle BO_3 N \quad \Rightarrow \angle KBO_3 = \angle O_3 BN = \frac{\angle B}{2}$$

$$\angle AOB = 180 - \angle O_3 AK - \angle O_3 BK = 180 - \left(\frac{\angle A + \angle B}{2} \right) = \underline{\underline{60}}$$

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$AO \cdot BO = 42$$

$$S_{AOB} = OK \cdot \frac{AB}{2} = AO \cdot OB \cdot \frac{\sin \alpha}{2}$$

$$AB = \frac{AO \cdot OB}{OK} \cdot \sin 60 = \frac{21\sqrt{3}}{5} \approx 7,27$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③

"0" "5" "9"

5 5 5 5 5 5 = "a"

13 - значн. число только цифры "0", "9", "a"

1. вариант

$$\frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{12} - 2$$

2. вариант

$$12 \cdot \frac{9 \cdot a}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^{12} - 2$$

$$12 \cdot (2^{12} - 1) + 2^{12} - 2 = 7 \cdot 2^{12} - 14 = 286720 - 14 = 286706$$

①

$$y = x^2$$

$$y = 16 \quad \text{отрез. длин. } x$$

$$y = 64 \quad \text{отрез. длин. } b$$

$$y = a \quad \text{отрез. длин. } c$$

$$28 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = y$$

$$b = 16$$

$$x = 26$$

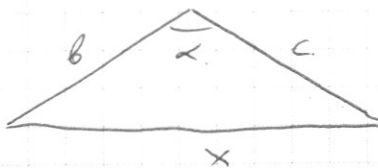
$$b = 16$$

$$x = 26$$

$$c = ?$$

$$\alpha = 120^\circ$$

1. вариант



$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ = b^2 + c^2 + bc$$

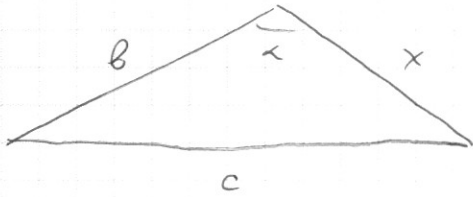
$$676 = 256 + c^2 + 16c$$

$$c^2 + 16c - 420 = 0$$

$$c_1 = 14$$

$$c_2 = -30 (< 0) \times$$

2. вариант.



$$c^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos \alpha =$$
$$= 1348$$

$$c_2 = \sqrt{1348}$$

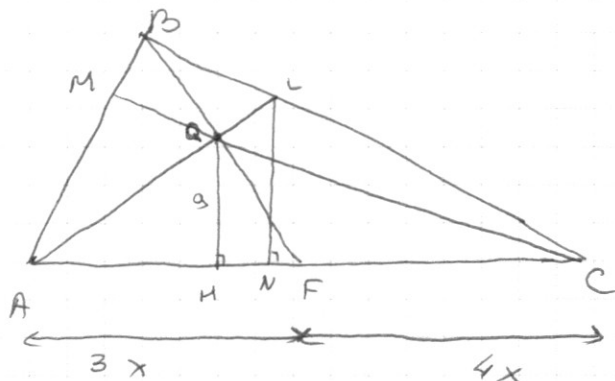
$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a$$

$$a_1 = \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 = \left(\frac{14}{2}\right)^2 = \underline{\underline{49}}$$

$$a_2 = \left(\frac{c_2}{2}\right)^2 = \underline{\underline{337}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



$$S_{BQL} = \frac{S_{ABC}}{12} = \frac{S}{12}$$

$$AF : FC = 3 : 4$$

$$QH = g$$

LN - ?

$QH \parallel LN$

$$\Delta AQH \sim \Delta ALN$$

$$\frac{g}{LN} = \frac{AH}{AH + HN} = \frac{AQ}{AQ + QL}$$

$$BM \cdot AF \cdot CL = MA \cdot FC \cdot BL$$

$$3 BM \cdot CL = 4 \cdot MA \cdot BL$$

$$AE \perp BC$$

$$AE \cdot BC = 12 \cdot BL \cdot QS$$

$$QS \perp BC$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \\ x+5 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq -3 \\ x \neq 1 \quad x \neq -2 \\ x > -5 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3}-x < 1 \\ (x+5) \leq \sqrt{x+3}-x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3}-x > 1 \\ (x+5) \geq \sqrt{x+3}-x \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3}-x < 1 \\ (x+5) < \sqrt{x+3}-x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+3}-x > 1 \\ (x+5) > \sqrt{x+3}-x \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\sqrt{x+3}-x > 0$$

$$x \geq -3$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$x \in [-3; 0] \quad \text{и}$$

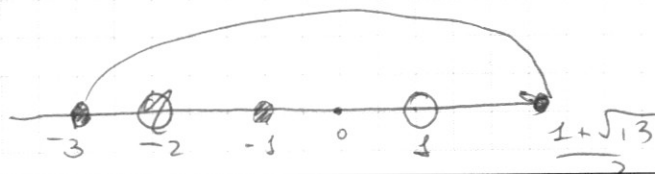
$$x > 0 \\ x+3 > x^2$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

$$x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

1, 2, 3



$$\sqrt{x+3} - 2x - 5 < 0 \quad \sqrt{x+3} - 2x - 5 \geq 0$$

$$0 \quad 0 \quad -3 \quad -3$$



$$x \leq -2,5$$

$$\sqrt{x+3} = 1+x$$

square
x > -5

$$-2 \sqrt{x+3} + 2$$

$$-2,5$$

$$x+3 = x^2 + 1 + 2x$$

0

$$-1$$



$$\sqrt{x+3} - 2x - 5 = 0$$

$$\sqrt{x+3} = 2x+5$$

$$2x+5 > 0$$

$$x > -\frac{5}{2} = -2,5$$

$$x > -3$$

$$x < 2,1$$

$$x+3 = 4x^2 + 25 + 20x$$

$$-2$$

$$-\frac{11}{2} = -2,75$$

$$-3 < -2,75 < -$$

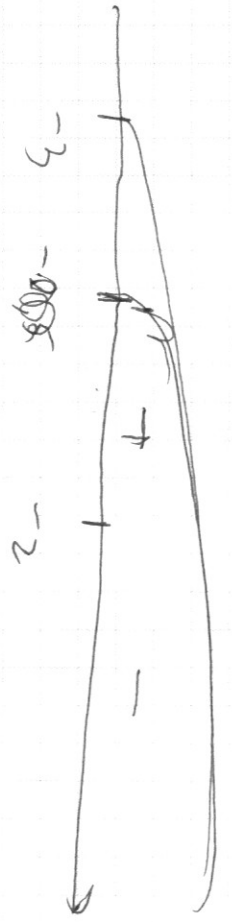
$$\sqrt{x+3} = 2x+5$$



$$\sqrt{x+3} = 2x+5$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x \geq 2,23$$



$$x \geq 2,23$$

$$x \geq 2,23$$

$$x \geq 2,23$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten geometric diagrams showing various shapes, circles, and lines with labels like A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, alpha, beta, gamma, delta, epsilon, zeta, eta, theta, iota, kappa, lambda, mu, nu, xi, omicron, pi, rho, sigma, tau, upsilon, phi, chi, psi, omega, and Greek letters like $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

$\alpha = \beta$

$$\sin 9x \sin 5x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = 9 \cos 9x \sin 5x + 5 \cos 5x \sin 9x - 2 \sin 7x \cdot 7 \cos 7x + 2 \cos x \sin x = 0$$

$$9 \cos 9x \sin 5x + 5 \cos 5x \sin 9x - 14 \sin 7x \cos 7x + 2 \cos x \sin x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

