МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3 ШИФР 3-005

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 3?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

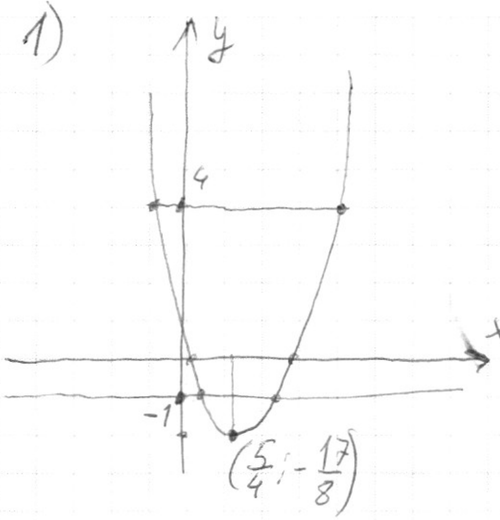
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

3-005

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)



$y = 2x^2 - 5x + 1 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4} \quad -\frac{D}{4a} = -\frac{17}{8}$

Пусть m и n длины соответственно первой и второй отрезки.

I) $2x^2 - 5x + 1 = -1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = 2 \Rightarrow m = |x_2 - x_1| = \frac{3}{2}$

II) $2x^2 - 5x + 1 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = 3 \Rightarrow n = |x_2 - x_1| = \frac{7}{2}$

III) Пусть p длина отрезка, высекающаяся параболой от прямой $y = a$.

$2x^2 - 5x + 1 = a \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 1 - a = 0 \quad D = 17 + 8a \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{17+8a}}{4};\ x_2 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17+8a}}{4} \Rightarrow p = |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{17+8a}}{2}$

IV) Понятно, что a можно выбрать двумя способами:

1. $m^2 + n^2 = p^2 \Leftrightarrow 1{,}5^2 + 3{,}5^2 = p^2 \Leftrightarrow p = \sqrt{\frac{29}{2}}$

$\sqrt{\frac{29}{2}} = \frac{\sqrt{17+8a}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{41}{8}$

2. $n^2 - m^2 = p^2 \Leftrightarrow p = \sqrt{10} \quad \sqrt{10} = \frac{\sqrt{17+8a}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{23}{8}$

Ответ: $a = \frac{23}{8}; \frac{41}{8}$.

4) $|ax-2a| \leq \sqrt{x-1}$

Рассмотрим $x \in [2;+\infty)$ случай. Тогда $|ax-2a| \leq \sqrt{x-1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |a|(x-2) \leq \sqrt{x-1} \Leftrightarrow a^2(x-2)^2 \leq x-1 \Leftrightarrow a^2x^2-(4a^2+1)x+$
$+4a^2+1 \leq 0 \quad D=4a^2+1 \Rightarrow x \in \left[\frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{2a^2}; \frac{4a^2+1+\sqrt{4a^2+1}}{2a^2}\right]$

Должен иметь место равенство $\frac{\sqrt{4a^2+1}}{a^2}=3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9a^4-4a^2-1=0 \quad D=52 \Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}$

С другой стороны $\frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{2a^2} \geq 2 \Leftrightarrow 4a^2 \leq 0 \Leftrightarrow a=0,$
но $0 \neq \frac{2\pm\sqrt{13}}{9} \Rightarrow$ в $x \in [2;+\infty)$ случае задача не
имеет решений.

Теперь разберём случай ~~$x \in [1;2)$~~. $x \geq 1$
Тогда снова $a=\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}$.

$\Rightarrow \frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{2a^2} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{4a^2+1} > 1$

Значит $a=\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) Возьмём наибольшую шестёрку из промежутка [91; 120], т.е. 120, 119, ... 115, сумма которых равна 705. Теперь мы не можем выбрать числа 90, 89, ... 85. Вместо них выбираем числа 84, 83, ... 79, ~~их~~ сумма которых равна 489. Поступая аналогичным образом, из промежутка [31; 60] выбираем 48, 47...43 (их сумма 273) и из [1; 30] – числа 12, 11, ... 7 (их сумма 57). Сумма всех 24 чисел равна 1524. ~~В построенном примере если, например, вместо числа 84 выбрать 90, то нужно вы оставить число 120 и вместо него выбрать~~

5) Пусть число рабочих – n, количество часов – t. По условию $28nt = 21(n+2)(t+1) = 15(n+6)(t+2)$.

$28nt = 21(n+2)(t+1) \Leftrightarrow t = \frac{3n+6}{n-6}$

$21(n+2)(t+1) = 15(n+6)(t+2) \Leftrightarrow 7(n+2)\left(\frac{3n+6}{n-6}+1\right) = 5(n+6)\left(\frac{3n+6}{n-6}+2\right) \Leftrightarrow 3n^2-64n+180=0 \quad D=1936 \Rightarrow$

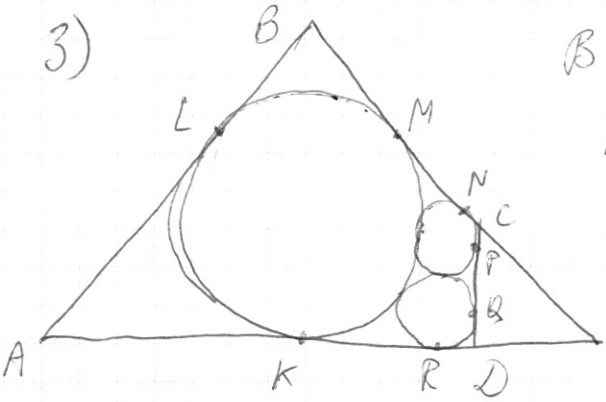
$\Rightarrow n = \frac{64\pm44}{6} = \cancel{\frac{20}{6}}; 18$

Ответ: 18 человек.

3-005

2) Заметим, что 9999 можно считать одно число. Пусть это число a. Нам необходимо нужно, чтобы каждый из чисел 3 и 4 присутствовал хотя один раз. Так как мы заменили 9999 на a, то число становится 13-значным. Тогда числа $a, 3, 4$ можно писать внём ~~в поря~~ с $13 \cdot 12 \cdot 11$ способами. В остальных 10 местах можно писать и 3, и 4, значит есть два варианта в каждой клетке писать число. Отсюда количество всех таких 16-значных чисел – $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 2^{10}$.

3)



В рисунке обозначены точки касания окружностей со сторонами четырёхугольника. Пусть x, y, z радиусы соответственно окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Тогда $KR = 2\sqrt{xz}$, $MN = 2\sqrt{yz}$, $PQ = 2\sqrt{xy}$.

Из условия $AD + BC - AB - CD = 24$ получаем, что $(BM + MN + NC + AK + KR + RD) - (AL + LB + CP + PQ + QR) =$
$= 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{zx} - 2\sqrt{xy} = 24 \Leftrightarrow \sqrt{yz} + \sqrt{zx} - \sqrt{xy} = 12.$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$120+115=235 \quad 235\cdot3=600+90+15=705$

$84+79=163 \quad 163\cdot3=300+180+9=489$ } 1194

$48+43=91 \quad 91\cdot3=273$

$12+7=19 \quad 19\cdot3=57$ } 330 $\quad$ 1524

13 $\quad$ 9999 `a $\quad$ 13 цир

| 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| a | 2 | 2 | ... | 2 |

| a | 3 | 4 | 2 | 2 | 2 | ... |

2^{10}

a 3 4 $\quad$ $6\cdot2^{10}$

a 4 3

4 3 a

3 4 a

$28nt=21(n+2)(t+1)=15(n+4)(t+1)$

$7(nt+2t+n+2)=5(nt+4t+n+4)$

$2nt-6t+2n-6=0 \quad nt-3t+n-3=0$

$(n-3)t+n-3=0 \quad (n-3)(t+1)=0 \quad n=3$

180
12
1440
720
2160

$7(n+2)\left(\frac{3n+6}{n-6}+1\right)=5(n+6)\left(\frac{3n+6}{n-6}+2\right)$

$7(n+2)(3n+6+n-6)=5(n+6)(3n+6+2n-12)$

$7(n+2)4n=5(n+6)(5n-6)$

$28n^2+56n=5(5n^2+30n-6n-36)=25n^2+120n-180$

$3n^2-64n+180=0 \quad D=4096-2160=2096-160=2036-100$

1936

1936 | 44
176 | 4
176

$156\cdot156=16$ $\quad$ $44\cdot44=176$

$n=\frac{64\pm44}{6}=18$

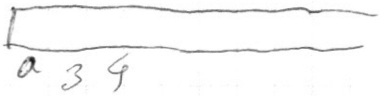
$\frac{108}{6}=18$

☒ черновик $\quad$ ☐ чистовик

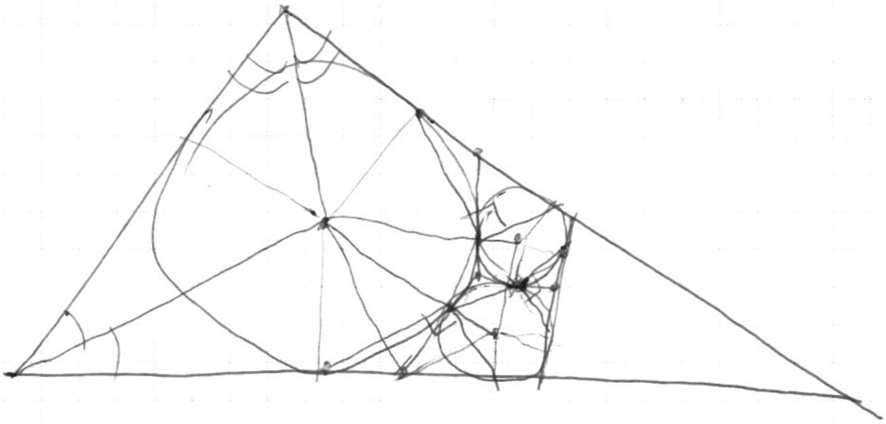
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 2^{10}$



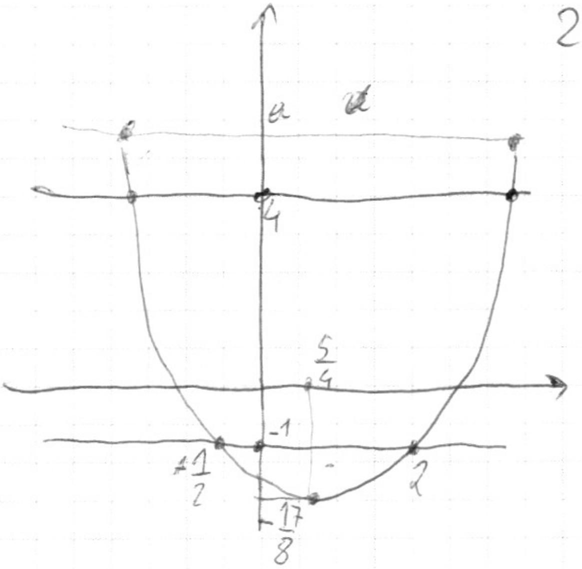
3-005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-005
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2x^2-5x+1 \quad D=25-8=17 \quad -\frac{b}{2a}=\frac{5}{4}$

$-\frac{D}{4a}=-\frac{17}{8}$

$2x^2-5x+2=10$

$D=25-16=9$ $\quad \frac{3}{2}$

$x=\frac{5\pm3}{4}=2;\frac{1}{2}$

$2x^2-5x-3=0 \quad D=25+24=49$

$x=\frac{5\pm7}{4}=3;-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{7}{2}$

$\sqrt{1{,}5^2+3{,}5^2}=\sqrt{\frac{9+49}{4}}=\sqrt{\frac{29}{2}}$

$2x^2-5x+1-a=0$

$D=25-8(1-a)=17+8a$

$\sqrt{3{,}5^2-1{,}5^2}=\sqrt{10}$

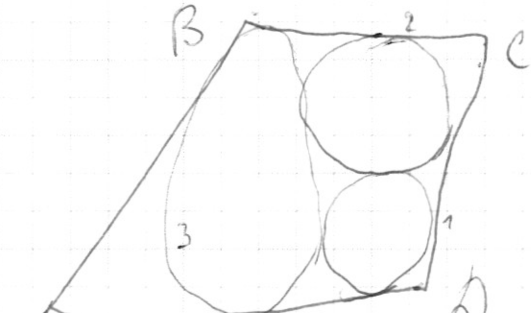
$x=\frac{5\pm\sqrt{17+8a}}{4} \quad \frac{5+\sqrt{17+8a}}{4}-\frac{5-\sqrt{17+8a}}{4}$

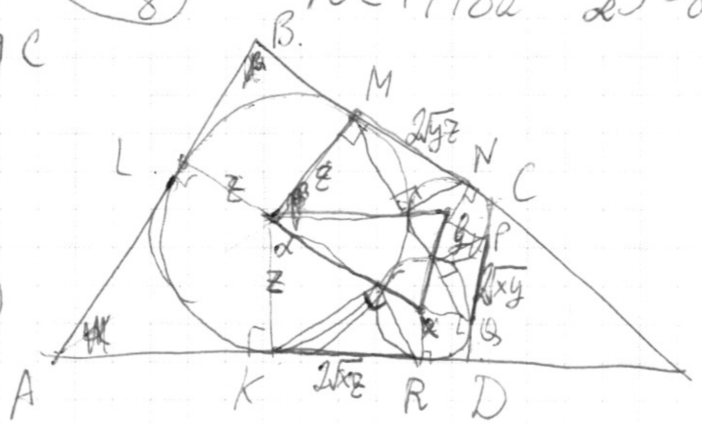
$\frac{\sqrt{17+8a}}{2}$

$\frac{29}{2}=\frac{17+8a}{2} \quad 58=17+8a$

$41=8a \quad a=\frac{41}{8}$

$40=17+8a \quad 23=8a \quad a=\frac{23}{8}$





$(\cancel{AL}+\cancel{LB}+\cancel{CP}+PQ+\cancel{QD})-(\cancel{BM}+MN+\cancel{NC}+\cancel{AK}+KR+\cancel{RD})=24$

$2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{xz}=24$

$\boxed{\sqrt{xy}-\sqrt{yz}-\sqrt{zx}=12}$ $\quad \sqrt{yz}+\sqrt{zx}-\sqrt{xy}=12$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$2 > \frac{4a^2+\cancel{1+}\sqrt{4a^2+1}}{2a^2} \geq 1 \qquad \textcircled{k} > 1-\sqrt{4a^2+1} \qquad \text{выяснить}$$

$$2a^2+1-\sqrt{4a^2+1} \geq 0 \qquad \cancel{4a^2} > \frac{4a^2+1+\sqrt{4a^2+1}}{\cancel{2a^2}} \quad -1 > \sqrt{4a^2+1}$$

$$4a^4+4a^2+1 \geq \cancel{4a^2+1} \qquad 2ka^2 > 4a^2+1+\sqrt{4a^2+1}$$

$$(2k-4)a^2-1 > \sqrt{4a^2+1}$$

$$(2k-4)^2a^4+1-(4k-8)a^2 > 4a^2+\cancel{1} \qquad a^2k^2-4a^2k+4a^2 > k-1$$

$$(2k-4)^2a^4-4(k-1)a^2 > 0 \qquad a^2k^2-(4a^2+1)k+4a^2+1 > 0$$

$$(k-2)^2a^2 > (k-1) \qquad D = \cancel{16a^4}+8a^2+1-\cancel{16a^4}+4a^2 = 4a^2+1$$

$$k \in \left(-\infty; \frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{2a^2}\right) \cup \left(\frac{4a^2+1+\sqrt{4a^2+1}}{2a^2}; +\infty\right)$$

$$\frac{4\left(\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}\right)^2+1+\sqrt{4\left(\frac{2\pm 13}{9}\right)^2+1}}{2\left(\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}\right)^2} \qquad \left(\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}\right)^2 = \frac{17\pm 4\sqrt{13}}{81}$$

120, 119, $\frac{1}{x}$ дет. ориф

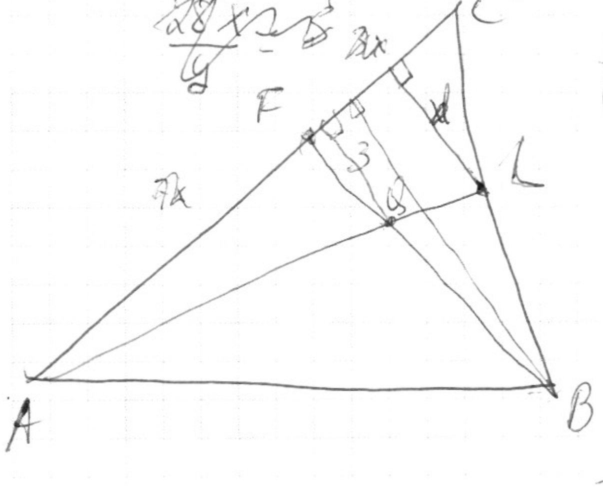
n чел. t дней

$$\frac{28nt}{x} = S = \frac{21(n+2)(t+1)}{x} = \frac{15(n+6)(t+2)}{x}$$

$$\frac{\frac{68\pm16\sqrt{13}}{81}+1\sqrt{\frac{68\pm16\sqrt{13}}{81}+1}}{}$$

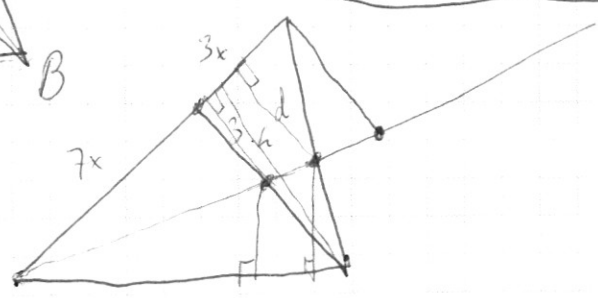
x чел. $\frac{1}{y}$ дет. ориф

$$\cancel{\frac{28}{y}x = D}$$



$$\frac{FQ}{QB} = \frac{3}{h-3} \qquad \frac{BL}{LC} = \frac{h-d}{d} \qquad \frac{AQ}{QL} = \frac{3}{d-3}$$

$$\boxed{28nt = 21(n+2)(t+1) = 15(n+6)(t+2)}$$



☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

3 - 005

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3 - 005

ШИФР

(заполняется секретарём)

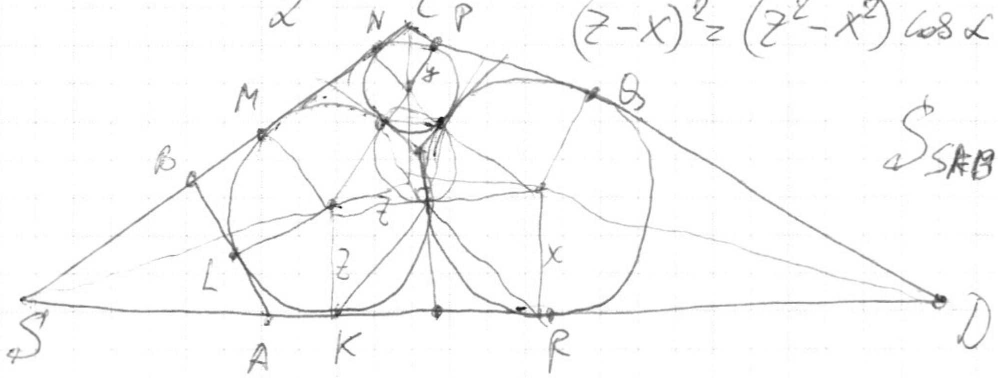
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(2z\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(2x\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=4xz$ $\boxed{z^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+x^2\cos^2\frac{\alpha}{2}=xz}$ $\cos\alpha=\frac{z-x}{z+x}$

$\left(2z\sin\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(2y\cos\frac{\beta}{2}\right)^2=4yz$ $\boxed{z^2\sin^2\frac{\beta}{2}+y^2\cos^2\frac{\beta}{2}=yz}$ $\cos\beta=\frac{z-y}{z+y}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ $z^2-z^2\cos\alpha+x^2+x^2\cos\alpha=2xz$

$(z-x)^2=(z^2-x^2)\cos\alpha=$



$S_{SAB}=\frac{SA\cdot z}{2}+\frac{AB\cdot z}{2}$

$(SA+SB-AB)\frac{z}{2}$

$|ax-2a|\leq\sqrt{x-1}$ $|a(x-2)|\leq\sqrt{x-1}$ $x\geq1$

1) $x\in[2;+\infty)$ $|a|(x-2)\leq\sqrt{x-1}$ $a^2(x-2)^2\leq x-1$

$a^2x^2-4a^2x+4a^2-x+1\leq0$ $D=16a^4+8a^2+1-16a^4-4a^2=$

$a^2x^2-(4a^2+1)x+4a^2+1\leq0$ $=4a^2+1$

$x\in\left[\frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{2a^2};\frac{4a^2+1+\sqrt{4a^2+1}}{2a^2}\right]$ $\frac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{2a^2}\geq2$

$\frac{\sqrt{4a^2+1}}{a^2}=3$ $4a^2+1=9a^4$ $9a^4-4a^2-1=0$ $D=16+36=52$

$a=\frac{4\pm2\sqrt{13}}{18}=\frac{2\pm\sqrt{13}}{9}$ $1\geq\sqrt{4a^2+1}$ $4a^2\leq0$, $a=0$ | 2) $x\in(2;+\infty)$

2) $x\in[1;2)$ $|a|(2-x)\leq\sqrt{x-1}$

$a^2(4+x^2-4x)\leq x-1$ $a^2x^2-(4a^2+1)\cancel{x}+4a^2+1\leq0$

$a^2x^2-4a^2x+4a^2\leq x-1$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4nt = 3(nt+n+2t+2)$ $\quad \cancel{t=} \cancel{(n-6)}t = \dfrac{3n+6}{\cancel{n}-6}$ условие

$nt = 3n+6t+6$ 268 $\cancel{180}$ 168

$7(nt+n+2t+2) = 5(nt+6t+2n+12)$

$2nt = 3n+16t+46$ $\quad (2n-16)t = 3n+46$

$\dfrac{3n+46}{2n-16} = \dfrac{3n+6}{n-6}$ $\quad 3n^2-18n+46n-264 = 6n^2-48n+12n-96$

$-3n^2+28n = -36n+168$ $\quad 3n^2-64n+168=0$

$D = 4096-2016 = 2080$

$\begin{array}{r} 64 \\ \times 64 \\ \hline 256 \\ 384 \\ \hline 4096 \end{array}$

$400+240+32=672$

$1800+210+6=2016$

$\cancel{n = \dfrac{64 \pm \sqrt{2020}}{6}}$

$4nt = 3(n+2)(t+1) = 3nt+3n+6t+6$

$nt = 3n+6t+6$ $\quad (n-6)t = 3n+6$ $\quad t = \dfrac{3n+6}{t-6}$

$28nt = 15(nt+2n+6t+12) = 15nt+30n+90t+180$

$13nt-90t = 30n+180$ $\quad t = \dfrac{3n+180}{13n-90}$

$\dfrac{3n+180}{13n-90} = \dfrac{3n+6}{n-6}$ $\quad \dfrac{n+60}{13n-90} = \dfrac{n+2}{n-6}$ $\quad \cancel{n}$ $\quad \begin{array}{r} 240 \\ -24 \\ \hline 216 \end{array}$

$n^2-6n+60n-360 = 13n^2+26n-90n-180$

$-12n^2+54n-180 = -64n$

$12n^2-118n+180=0$ $\quad D = 3600-120+1-24\cdot 90 =$

$6n^2-59n+90=0$ $\quad = 3481-2160 = 1321$

120, 119, 118, 117, 116, 115

[90, 89, 88, 87, 86, 85] 84, 83, 82, 81, 80, 79

[60 … 55] [54 … 49] 48, 47, 46, 45, 44, 43

[30…25] [24…19] [18…13] 12, 11, 10, 9, 8, 7

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)