МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 4-010

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AQ}{QZ}\cdot\frac{BZ}{ZC}=1$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}\cdot\frac{S_2}{S}\cdot\frac{S_2+S}{15S-S_2}=1 \\ \frac{h}{7}\cdot\frac{S_2}{S+S_2}=1 \end{cases}$$

$$15S-S_2=\frac{h7}{27}S_1$$

$$\frac{7h}{27}S_1\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{S_2}{S}(S_2+S)=1$$

$$\frac{h}{7}\cdot\frac{S_2}{S+S_2}=1$$

$$\begin{cases} \frac{28}{9}h\cdot\frac{S_2}{S}(S_2+S)S_1=1 \\ \frac{h}{9}\cdot\frac{S_2}{S+S_2}=1 \end{cases}$$

$$\frac{28h}{9}\cdot S_1+S_2=\frac{48}{7}S$$

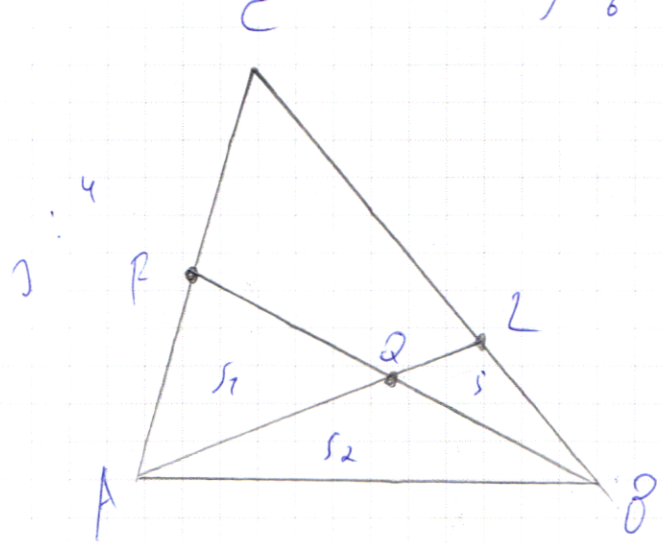
$$\frac{28h}{9}\cdot\frac{S_2(S_2+S)}{S}\left(\frac{48S}{7}-S_2\right)=\frac{h}{7}\cdot\frac{S_2}{S+S_2}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

4-010

№ 6



Пусть $S_{QLB}=S$, тогда $S_{ABC}=16S$

$S_{AKQ}=S_1$, $S_{AQB}=S_2$

По теореме Менелая для $\triangle CLA$ и секущей KB.

$$\frac{CK}{KA}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{BL}{BC}=1$$

По теореме Менелая для $\triangle CBK$ и секущей AL

$$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QK}\cdot\frac{AK}{AC}=1$$

$S_{AKQ}=S_1=\frac{1}{2}AK\cdot 9$

$$\frac{CL}{LB}=\frac{S_{ACL}}{S_{ALB}},\quad \frac{BQ}{QK}=\frac{S_{AQB}}{S_{AKQ}}$$

$S_{ACL}=\frac{1}{2}AC\cdot h=16S-S_2-S$

$$\frac{16S-S_2-S}{S+S_2}\cdot\frac{S_2}{S_1}\cdot\frac{3}{7}=1$$

h — искомое расстояние

$$\frac{15S-S_2}{S+S_2}\cdot\frac{S_2}{S_1}\cdot\frac{3}{7}=1$$

$$\frac{\frac{1}{2}AK\cdot 9}{\frac{1}{2}ACh}=\frac{S_1}{15S-S_2}$$

$$\frac{h7}{27}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{S_2}{S+S_2}=1$$

$$\frac{27}{7h}=\frac{S_1}{15S-S_2}$$

$$\frac{h}{9}\cdot\frac{S_2}{S+S_2}=1$$

$$\frac{h7}{27}=\frac{15S-S_2}{S_1}$$

$$\frac{9}{h}=\frac{AQ}{AL}\qquad h=\frac{9AL}{QA}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$f(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$f(x) = \frac{1}{2}(\cos(4x) - \cos(14x)) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 7x + 1) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 2\cos^2 7x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \cos^2 2x - \underbrace{(\sin^2 7x + \cos^2 7x)}_{1} - \cos^2 x - 3 = \cos^2 2x - \cos^2 x - 4 =$

$= \cos^2 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} - 4 = \frac{2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x - 8}{2} =$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - \cos 2x - 9)$; Замена $\cos 2x = t$

$-1 \le t \le 1$

$\frac{1}{2}(2t^2 - t - 9) = f(t)$ наименьшее значение достигается в вершине так как ветви параболы вверх.

$t = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-1)}{4} = \frac{1}{4}$ $\quad f_{min}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 9\right) = -\frac{73}{16}$

Пусть $2t^2 - t - 9 = g\ \varphi(t)$; $t_{вершины} = \frac{1}{4}$; $-1 \le t \le 1$

$t > \frac{1}{4}$ функция возрастает ; $t < \frac{1}{4}$ функция убывает

Наибольшее значение при $t = -1$ либо $t = 1$

$t = 1$; $\frac{2\cancel{\cos^2} \cdot 1 - 1 - 9}{2} = -4$

$t = -1$; $\frac{2 \cdot 1 - (-1) - 9}{2} = -3$ $\quad -3 > -4$

Ответ: наименьшее — $-\frac{73}{16}$, наибольшее — -3

№7

$[1;35]$, $[36;70]$; $[71;105]$; $[106;140]$, $[141;175]$

Заметим что каждое первое число из этих промежутков имеет остаток от деления на 35 равный 1, каждое второе — 2 ... каждое последнее ноль.

Чем больше остаток от деления на 35 в одном промежутке тем больше и число (ноль не учитываем так как его можно заменить на 35 и число будет наибольшим в своём промежутке)

Так как интервалы расположены последовательно по возрастанию, очевидно, что нужно взять 5 чисел с наименьшими остатками из последнего интервала (а именно остатки: 1;2;3;4;5) и так далее до 5 чисел с наименьшими остатками в первом интервале (а именно остатки: 21; 22; 23; 24; 25)

В первом интервале числа дают при делении на 35 целую часть равную 0, в последнем интервале — 4 и так далее для других интервалов. (второй — 1, третий — 2, четвёртый — 3)

Наша наименьшая сумма будет иметь вид:

$$(4\cdot35+1)+(4\cdot35+2)+(4\cdot35+3)+(4\cdot35+4)+(4\cdot35+5)+(3\cdot35+6)+(3\cdot35+7)+$$
$$+(3\cdot35+8)+(3\cdot35+9)+(3\cdot35+10)\ldots+21+22+23+24+25=$$
$$=4\cdot35\overset{15}{(1+2+3+4+5)}+3\cdot35\cdot\overset{40}{(6+7+8+9+10)}+2\cdot35\overset{65}{(11+12+13+14+15)}+35\cdot\overset{90}{(16+17+18+19+20)}+$$
$$+\overset{115}{(21+22+23+24+25)}=35\cdot60+120\cdot35+130\cdot35+35\cdot90+115=$$
$$=35\cdot(60+120+130+90)+115=35\cdot400+115=14.115$$

Ответ: 14.115

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

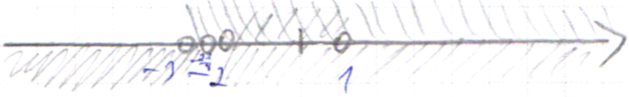
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} > x+1 \\ x > -3 \\ -x+2x+5 \geqslant \sqrt{x+3} - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+x-2 < 0 \\ 4x^2+20x+25 \geqslant x+3 \\ x > -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 1 \\ 4x^2+19x+22 \geqslant 0 \quad D=9 \\ x > -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 1 \\ \left(x+\frac{22}{8}\right)(x+2) \geqslant 0 \\ x > -3 \end{cases}$$



$x \in (-2; 1)$

Ответ: $(-2; 1)$

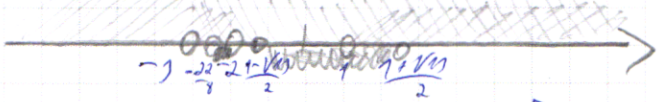
$$\begin{cases} x > -3 \\ \sqrt{x+3} > x \\ \sqrt{x+3} < x+1 \\ 2x+5 \leqslant \sqrt{x+3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-3 < 0 \\ x > -3 \\ x^2+x-2 > 0 \\ \left(x+\frac{22}{8}\right)(x+2) < 0 \end{cases}$$

$x^2-x-3=0$

$D = 1+12 = 13$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ ≈ 2, ≈ -2

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) < 0 \\ x > -3 \\ (x+2)(x-1) > 0 \\ \left(x+\frac{22}{8}\right)(x+2) < 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x > \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x < \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \qquad \frac{1-\sqrt{13}}{2} \gtrless -2$$

~~$1 - \sqrt{13} \geq -4$~~

$$\begin{cases} x > \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x < -2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1-\sqrt{13} > -4 \\ \sqrt{13} < 5 \end{matrix}$$

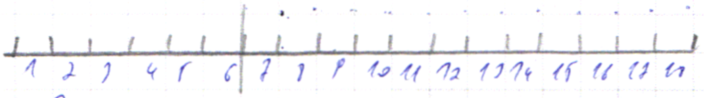
$\varnothing$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3
(Нумеровать только чистовики)

4-010

№3



Рассмотрим два случая:

1) когда первые 6 цифр нечётные. В таком случае на 7 месте может быть и ноль и девять как и на остальных 8 – 18 местах. Тогда нужно просто посчитать сколько вариантов расположения нуля и девятки на $(18-6)=12$ местах. А это равняется $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^{12}$. Так как на каждом месте могут быть как ноль так и девятка. Но нужно отнять два случая когда нет ни одного нуля или девятки. $2^{12}-2$

2) когда первые 6 цифр не нечётные. В таком случае на первом месте обязательно должна быть 9 так как число не может начинаться с нуля и нам надо будет выбирать из 11 а не 12 мест $(18-\cancel{12}^{6}-1=11)$. Это будет равно 2^{11} но нужно исключить случай когда не будет ни одного нуля. $(2^{11}-1)$ и умножить это на кол-во вариантов расположения шести нечётных, а именно 13 (всего) -1 (когда нечётные вначале) $=12$

$(2^{11}-1)\cdot 12$

$$2^{12}-2+2^{11}\cdot12-12=2^{11}\cdot(2+12)-14=14\cdot(2^{11}-1)$$

Ответ: $14\cdot(2^{11}-1)$

№5

Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases}\sqrt{x+5}-x\geq 1\\ x+5>0\\ x>-3\\ \sqrt{x+5}-x>0\\ \log_{\sqrt{x+5}-x}(x+5)\geq 1\end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases}0<\sqrt{x+5}-x<1\\ x>-3\\ x>-5\\ \log_{\sqrt{x+5}-x}(x+5)\geq 1\end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть парабола пересекает прямые в точках A_1, A_2 $(y=64)$; B_1, B_2 $(y=169)$ и C_1C_2 $(y=a)$.

Тогда абсциссы этих точек соответственно равны:

$y=64=x_1^2$, $x_1=\pm 8$, $A_1(+8;64)$, $A_2(-8;64)$

$y=169=x_2^2$, $x_2=\pm 13$, $B_1(+13;169)$, $B_2(-13;169)$

$y=a=x_3^2$, $x_3=\pm\sqrt{a}$, $C_1(+\sqrt{a};a)$, $C_2(-\sqrt{a};a)$

Так как отрезки параллельны оси Ox то их расстояние будут соответственно равны: $A_1A_2=2\cdot 8=16$; $B_1B_2=13\cdot 2=26$; $C_1C_2=2\sqrt{a}=2\sqrt{a}$

Если существует треугольник со сторонами 16, 26 и $2\sqrt{a}$, то существует и подобный ему, уменьшенный в два раза. Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases}\sqrt{a}<13\\ 13<8+\sqrt{a}\\ (13)^2=(8)^2+(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\cdot 8\cos 120^\circ\end{cases} \vee \begin{cases}\sqrt{a}>13\\ \sqrt{a}<8+13\\ (\sqrt{a})^2=(13)^2+(8)^2-2\cdot 8\cdot 13\cos 120^\circ\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{a}<13\\ \sqrt{a}>5\\ 169=64+a+8\sqrt{a}\end{cases} \qquad \begin{cases}a>169\\ a<21^2\\ a=169+64+104\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+8\sqrt{a}-105=0\\ \sqrt{a}<13\\ \sqrt{a}>5\end{cases} \qquad \begin{cases}a=337\\ a>169\\ a<21^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{a}=\dfrac{-4\pm\sqrt{121}}{1}\\ \sqrt{a}<13\\ \sqrt{a}>5\\ \sqrt{a}=7 \quad \vee \sqrt{a}=-15 \text{ — посторонний}\\ a=49\end{cases}$$

Ответ: $a=49$, $a=337$

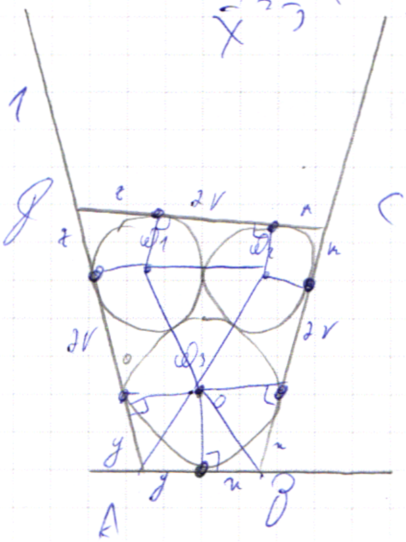
4-010

$\frac{4}{3}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{LB}{CB}=1$ $\quad 2S_1=t$

$\frac{1}{X}=\frac{4}{3}\left(1+\frac{S}{\frac{48S}{7}-S_1}\right)$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{3}{7}=1$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QF}=\frac{7}{3}$



$\frac{3}{4}=\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{LB}{CB}$

$\frac{3}{4}=\frac{S_2}{S}\cdot\frac{S+S_2}{16S}$

$3=\frac{S_2S+S_2^2}{4S}$

$12S=S_2S+S_2^2$

$S_2^2-S_2S-12S=0$

$\frac{2\cdot 7}{7h}=\frac{S_1}{\frac{S_1+57S}{7}}$

$12S=S_2S+S_2^2$

a) $AB+BC=10+AB+CB$

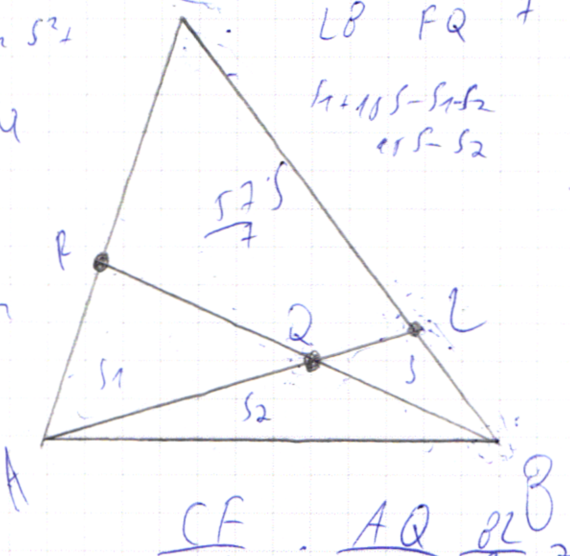
~~$2r+x+y$~~

$2r+2y+x+2r+x=10+x+y+x+2r+x$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{FQ}\cdot\frac{3}{7}=1$ $\quad r=5$ $\quad \frac{S_{ALB}}{S_{ABC}}=\frac{1}{16}$

$S_1+16S-S_1-S_2$

$16S-S_2$



$\frac{CF}{FA}\cdot\frac{AQ}{LQ}\cdot\frac{BL}{BC}=1$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{FQ}\cdot\frac{AF}{FC}=1$

$\frac{4}{3}\cdot\frac{S_2}{S}$

$\frac{AQ\cdot BQ\cdot CL}{QL\cdot FQ}=1$

$AQ\cdot BQ\cdot CL=QL\cdot FQ$

$\frac{57S+2S_1}{55S-7S_1}\cdot\frac{48S-7S_1}{7S_1}=\frac{1}{3}$

$X=\frac{\frac{48S}{7}-S_1}{S+\frac{48S}{7}-S_1}=\frac{3}{4}$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{FQ}\cdot\frac{3}{4}=1$

$\frac{S_1+\frac{57S}{7}}{S+\frac{48S}{7}-S_1}$ $\quad \frac{3}{4}=\frac{FQ}{BQ}=\frac{S_1}{\frac{48S}{7}-S_1}$

$\frac{7S_1+57S}{7S+48S-7S_1}$ $\quad \frac{3}{4}=\frac{7S_1}{48S-7S_1}$

$\frac{\frac{57S}{7}+S_1}{S+\frac{48S}{7}-S_1}\cdot\frac{\frac{48S}{7}-S_1}{S_1}=\frac{7}{3}$

$\frac{2}{7}\cdot\frac{9}{H}=\frac{S_1}{S_1+\frac{57S}{7}}$

$\frac{1}{2}AF\cdot 9=S_{AFQ}=S_1$

$\frac{1}{2}AC\cdot H=S_{ACL}=S_1+\frac{57}{7}S$

$\frac{64}{7}S$

$S_1+S_2=\frac{48S}{7}$ $\quad S_1$ через S

$S_2=\frac{48S}{7}-S_1$

$\frac{4}{3}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{BL}{CB}=1$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{FQ}\cdot\frac{3}{4}=1$

$\frac{4}{3}\cdot\frac{S_2}{S}\cdot\frac{S_2+S}{S_1+\frac{57}{7}S}=1$

$\frac{S_1+\frac{57}{7}S}{S+S_2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$\frac{57S+t}{55S-7} \qquad \frac{48S-t}{t}=\frac{1}{3}$$

$$3\left(48\cdot 57S^2+48S\cdot t-57S7-t^2\right)=7\cdot 55\cdot St-7t^2$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

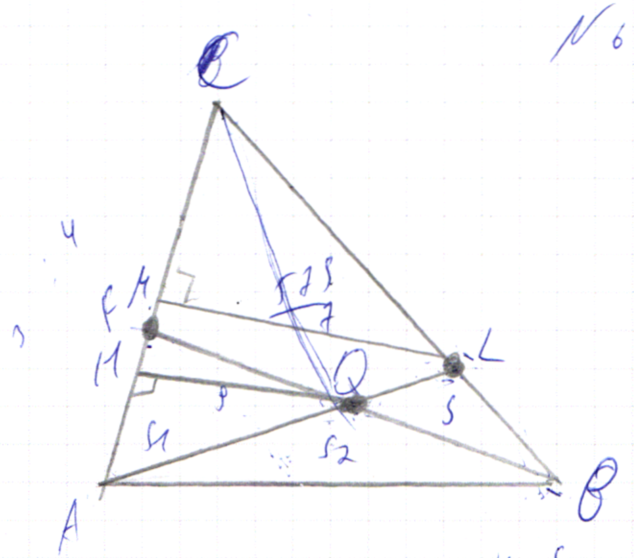
(Нумеровать только чистовики)

4-010
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$AK : KC = 3 : 4$



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$ $\quad \frac{16}{7}$

$\frac{16}{7} =$ $\quad \frac{16S}{7}\cdot 4 = \frac{64S}{7}$

$\frac{3\cdot 16}{7} = \frac{48}{7}$

$\frac{4\cdot 16}{7} = \frac{64}{7}$

$\frac{S_1 + \frac{57S}{7}}{S_2 + S}$ $\quad \frac{48S}{7} + \frac{57S}{7} + 7S$ $\quad \frac{64}{7} - 7 =$ $\quad \frac{64S}{7} - S =$

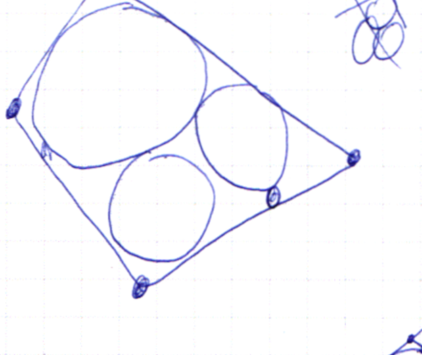
$S_{tot} = \frac{48S}{7}$ $\quad \frac{112S}{7}$ $\quad 16S$ $= \frac{57S}{7}$ $\quad \frac{+57 \; +48}{105}$

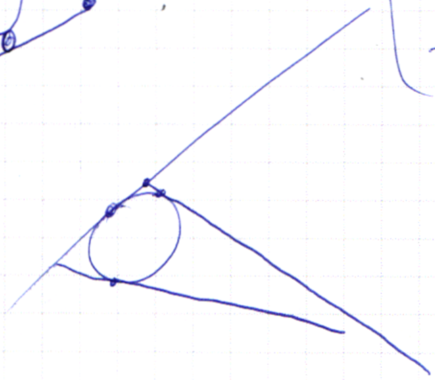
$\frac{\frac{48S}{7} - S_2 + \frac{57S}{7}}{S_2 + S} = \frac{7S - S_2}{S_2 + S}$

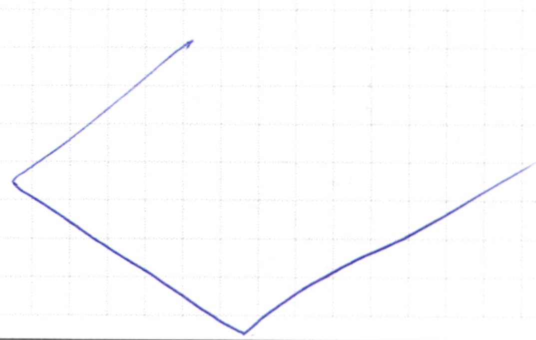
$QK = r$ $\quad QK \cdot \frac{1}{2} AK = S_1$

$LM \cdot \frac{1}{2} AC = \frac{57S}{7} + S_1$

$$\begin{cases} \frac{9}{2}\cdot 3x = S_1 \\ \frac{LM \cdot 2x}{2} = \frac{57S}{7} + S_1 \end{cases}$$







☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta + \cos$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$2\cos\alpha\cos\beta$

$\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos x - 7x$

$=$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$2\cos^2 2x - 1 + 2\cos 7x + 1$

$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \sin^2 7x - \cos x - 3 =$

$= \frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos^2 7x - \sin^2 7x - \cos x - 3 =$

$= \cos^2 2x - \cos^2 x - 4 =$

$=$

$2\cos^2\alpha - 1$

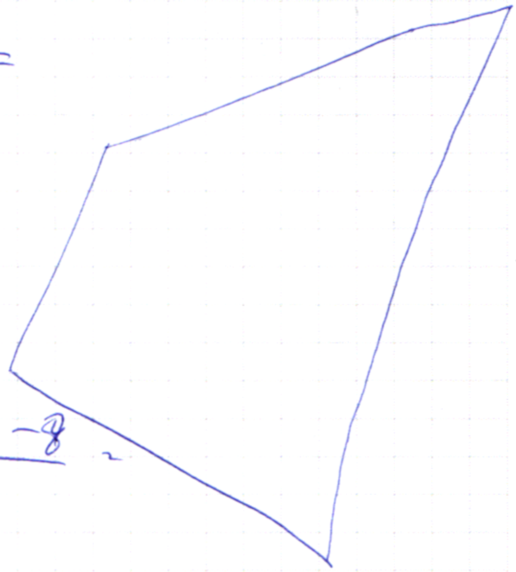
$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} - 4 =$

$= \cancel{2(\cos} \frac{2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x - 8}{2} =$

$= \frac{2\cos^2 2x - \cos 2x - 9}{2} =$

$= \frac{2t^2 - t - 9}{2} = \frac{1}{2}(2t^2 - t - 9)$



$2t^2 - t - 9 = 0$

$D = 1 + 72 = 73$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{2}$

$\frac{-b}{2a} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$4t - 1 = 0$

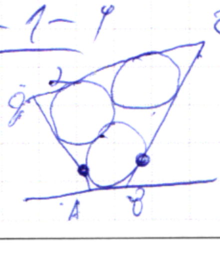
убывает, возрастает

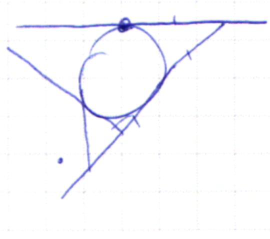
$t < \frac{1}{4}$ убывает

$\frac{2 + 1 - 9}{2}$

$\frac{2+1-9}{2}$ $\frac{-6}{2} = -3$ $\frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 9 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 9 = -\frac{1}{8} - 9 = -1\frac{1}{8}$

$2 - 1 - 9$ $\frac{-7}{2}$ $\frac{-9\frac{1}{8}}{2}$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

4-010

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 1$

$\sin 5x \sin 9x = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$-2\sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\frac{1}{2}(2\sin\alpha\sin\beta) = \sin\alpha\sin\beta$

$\frac{1}{2}(\cos(4x) - \cos(14x)) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 1 =$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\overset{4x+14x}{\alpha+\beta})\sin(\overset{4x-14x}{\alpha-\beta}) = 2\sin 9x \sin 5x$

$\frac{1}{2}(\overset{2\cos^2 2x-1}{\cos 4x} - \overset{2\cos^2 7x-1}{\cos 14x}) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 1 =$

$= \frac{1}{2}(2(\cos^2 2x - \cos^2 7x)) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 1 =$

$= \cos^2 2x - \cos^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 1 =$

$= \cos^2 2x - \cos^2 x - 4 =$

$= (2\cos^2 x - 1)^2 - \cos^2 x - 4 =$

$= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - \cos^2 x - 4 =$

$8t - 5 = 0$

$8t = 5$

$t = \frac{5}{8}$

$t > 0$

$4 - 5 - 1 = -4$

$<4 = \quad 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 1 = 0$

$\cos^2 x(4\cos^2 x - 5) - 1 \quad 4t^2 - 5t - 1 = 0$

$<-1 \quad \frac{-b}{2a} = \frac{5}{8}$

$t > \frac{5}{8}$ — вершина

$\cos^2 x > \frac{5}{8}$

$4t^2 - 5t - 1 = 0$

$4 - 5 - 1 =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

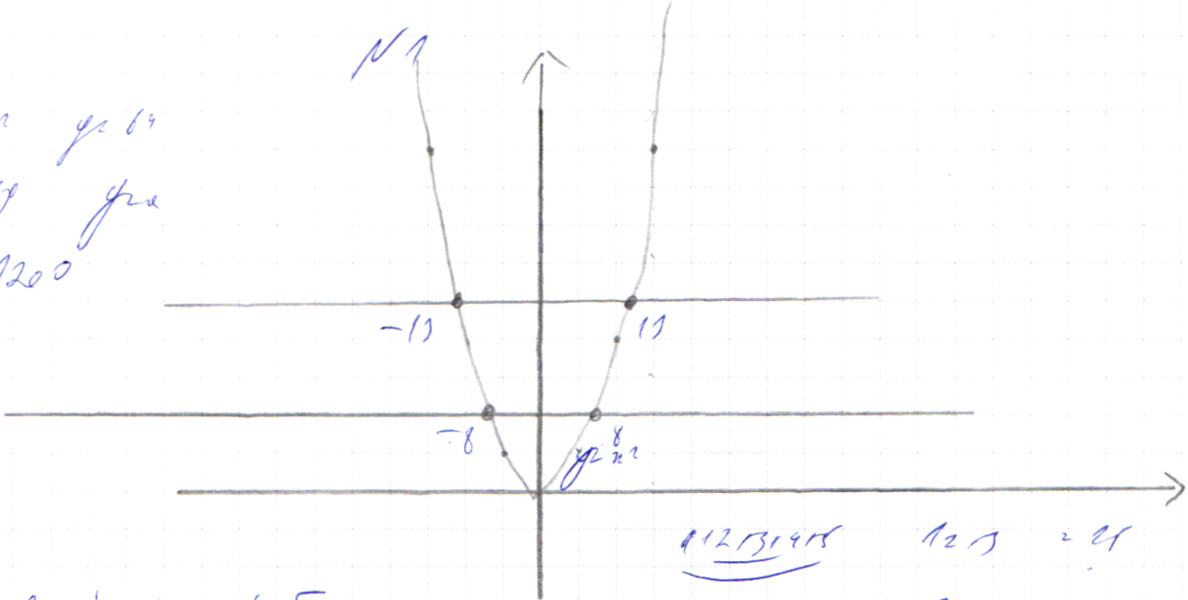
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y = x^2$ $\quad y = 64$

$y = 169$ $\quad y = a$

$\angle = 120°$



112131415 $\quad$ 1=11 $\quad$ =21

6... $\quad$ 3218=40

11 ... = 65

16 ... = 70

26 ; 16 ; $2\sqrt{a}$

$a > 11$

11 ; 8 ; $\sqrt{a}$

$$\begin{cases} 11 \geq \sqrt{a} \\ 11 < 8 + \sqrt{a} \\ 169 = 64 + a^2 - 16\sqrt{a}\cos 120° \end{cases}$$

$169 = 64 + a^2 + 8a$

$a^2 + 8a - 105 = 0$

$D = 16 + 105 = 121$

$a_{1,2} = -4 \pm 11$ $\quad \sqrt{a} = 7$ $\quad a = 49$

$a_1 = 7$

$a_2 = -15$

$$\begin{cases} a = 7 \text{ да} \\ 11 > a = 7 \text{ да} \\ 13 < 8 + 7 \text{ да} \end{cases}$$

$a = 7$!

$a = 49$

$169 - 64 = 105$

$64 + 49 + 56$

$a > 11$

$a < 11 + 8$

$a < 21$

$a^2 = 169 + 64 + 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{a} > 11 \\ \sqrt{a} < 21 \\ a^2 = 104 + 169 + 64 \end{cases}$$

$104 + 64 = 168$

$168 + 169 = 337$

$18 \cdot 18 = 324$

$a = \sqrt{337}$

$a > 18$

$a = \sqrt{337}$

$a = 337$

14000

14.115

$60 + 120 = 180$

$180 + 130 = 310$

$310 + 90 = 400$

4-010

№8

$\log_{\sqrt{x+13}-x}(x+13) \geq 1$

$\begin{cases} \sqrt{x+13}-x>1 \\ \cancel{x+13>0} \\ x>-7 \\ \cancel{\sqrt{x+13}>x} \\ x+13 \geq \sqrt{x+13}-x \end{cases}$

$\sqrt{x+13}>x+1$

$\begin{cases} x>-7 \\ x+13>x^2+1+2x \\ 2x+13 \geq \sqrt{x+13} \end{cases}$

$\begin{cases} x>-7 \\ x^2+x-2<0 \quad (x+2)(x-1)<0 \quad (-2;1) \\ 4x^2+169+52x \geq x+13 \end{cases}$

$4x^2+51x+156 \geq 0$

$D=2601-2496=105$

$x_{1,2}=\frac{-51 \pm \sqrt{105}}{8}$

$x_1 < -\frac{22}{8} \quad x_2 > -2$

$(-2;1)$!

$0<\sqrt{x+13}-x<1$

$x>-7$

$2x+13 \leq \sqrt{x+13}$

$\left(-\frac{22}{8};-2\right)$

$\sqrt{x+13}>x$

$x+13>x^2$

$x^2-x-13<0$

$D=1+52=53$

$x_{1,2}=\frac{1 \pm \sqrt{53}}{2}$

$\left(\frac{1-\sqrt{53}}{2};\frac{1+\sqrt{53}}{2}\right)$

$\boxed{\left(-\frac{22}{8};-2\right)}$ $x>-7$

$x+13<x^2+2x+1$

$x^2+x-12>0$

$(-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$

$\boxed{\left(\frac{1-\sqrt{53}}{2};-2\right)}$

$\frac{1-7{,}4}{2} \quad \frac{-11}{8}-2$

19
17
171
19
361

№2

$[1;35]$, $[37;70]$, $[71;105]$

$[106;140]$, $[141;175]$

$35k+1$ $35k+3$

$35k+2$

~~106; 107; 108;~~

16
22
22
32
352

35
4
140

106 107 108 109

Останется 1 до 35

~~106; 107; 108; 109; 110~~

141; 142; 143; 144; 145

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 №6

$2^{12}-2$ $\cancel{12\,(2^{12}}$

$\left\{\begin{array}{l} 2^{12}-2 \\ (2^{11}-1)\,12 \end{array}\right.$ + Ответ

$12\cdot 2^{11}+2^{12}-14$

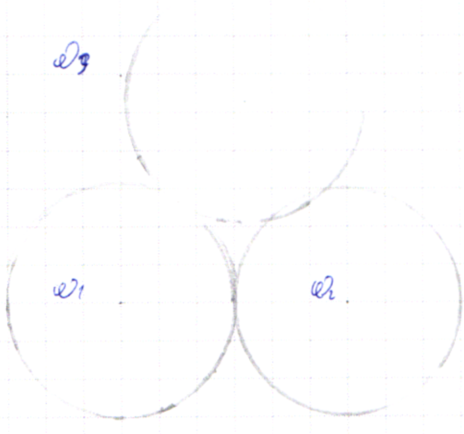
$2^{11}(2+12)-14=$

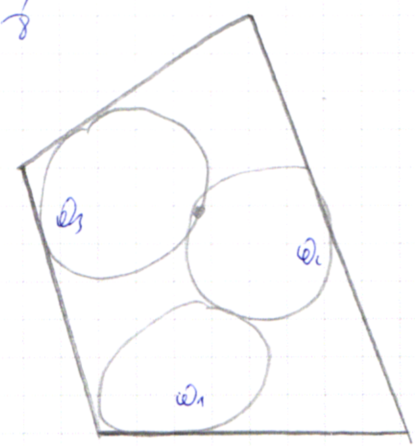
$=2^{11}(14)-14=\underline{14\cdot(2^{11}-1)}$

№4

$-\frac{11}{8}$ $-\frac{11}{16}$

$-1\frac{1}{8}$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)