

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

4-011

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2 - 5x + 1$  пересекает прямые  $y = -1$ ,  $y = 4$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 24$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$  является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 7 : 3$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $7 : 36$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 30]$ ,  $[31; 60]$ ,  $[61; 90]$ ,  $[91; 120]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$y = 2x^2 - 5x + 1$  т.к. график пересекает прямые  $y = -1$  и  $y = 4$ , то найдём точки пересечения

1) Графика  $\varphi$ -и  $y = 2x^2 - 5x + 1$  и  $y = -1$

$$2x^2 - 5x + 1 = -1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \quad x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{точки } (2; -1) \text{ и } \left(\frac{1}{2}; -1\right)$$

2) Графика  $\varphi$ -и  $y = 2x^2 - 5x + 1$  и  $y = 4$

$$2x^2 - 5x + 1 = 4$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49 = 7^2$$

$$x_1 = \frac{5+7}{4} = 3 \quad x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{точки } (3; 4) \text{ и } \left(-\frac{1}{2}; 4\right)$$

Найдём расстояния между полученными точками в пункте 1 и между точками из пункта 2.

1) Пусть расстояние между точками  $(2; -1)$  и  $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$  будет  $b$ , тогда

$$b = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + (-1 - (-1))^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0} = \left|\frac{3}{2}\right|, \text{ т.к. длина, то } b = \frac{3}{2}$$

2) Пусть расстояние между точками  $(3; 4)$  и  $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$  будет  $c$ , тогда

$$c = \sqrt{\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 + 0} = \left|3\frac{1}{2}\right| \Rightarrow c = 3\frac{1}{2}$$

Дальше т.к. из отрезков необходимо получить прямоугольный треугольник, рассмотрим несколько случаев:

I случай

$b$  и  $c$  - катеты, тогда пусть  $q$  гипотенуза.  
По т. Пифагора:

$$q^2 = b^2 + c^2 \quad q^2 = \frac{9}{4} + \frac{49}{4} = \frac{58}{4}, \quad q = \frac{\sqrt{58}}{2}$$

II случай

$b$  - катет,  $c$  - гипотенуза, тогда пусть  $g$  - 2-й катет  
По т. Пифагора

$$\frac{49}{4} = \frac{9}{4} + g^2 \quad g^2 = \frac{40}{4} \quad g = \frac{\sqrt{40}}{2}$$

III случай

$b$  - гипотенуза,  $c$  - катет, тогда пусть  $z$  - 2-й катет

$$b^2 = c^2 + z^2 \quad \frac{9}{4} = \frac{49}{4} + z^2, \text{ такою не может быть, т.к. } c > b.$$

Свероятливо, рассмотрим случай, когда  $q = \frac{\sqrt{58}}{2}$  и  $g = \frac{\sqrt{40}}{2}$ .

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 1 &= a \\ 2x^2 - 5x + 1 - a &= 0 \\ D &= 25 - 8(1-a) = 25 - 8 + 8a = 17 + 8a \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{17 + 8a}}{4} \end{aligned} \quad \begin{aligned} D &\geq 0 \\ 17 + 8a &\geq 0 \\ 8a &\geq -17 \\ a &\geq -\frac{17}{8} \end{aligned}$$

Значит:

$$1) \quad q^2 = \frac{58}{4} = (x_2 - x_1)^2 + 0, \text{ т.к. ордината точки одинаковая}$$
$$\frac{58}{4} = \left( \frac{5 + \sqrt{17 + 8a}}{4} - \frac{5 - \sqrt{17 + 8a}}{4} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{17 + 8a}}{2} \right)^2 = \frac{17 + 8a}{4}$$
$$58 = 17 + 8a \quad 8a = 41 \quad a = \frac{41}{8} = 5\frac{1}{8}$$

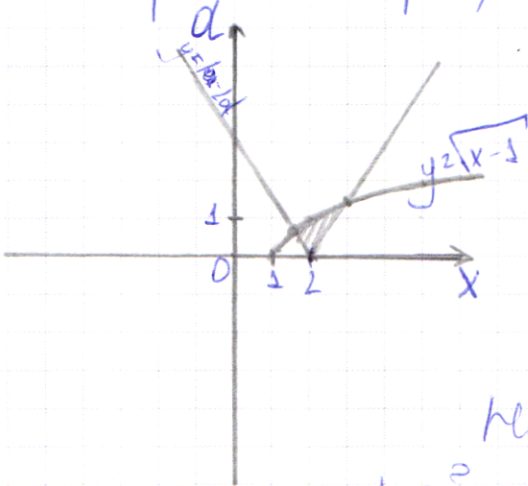
$$2) \quad g^2 = \frac{40}{4} = (x_2 - x_1)^2 \text{ (аналогично)}$$
$$\frac{40}{4} = \frac{17 + 8a}{4} \quad 40 = 17 + 8a \quad 8a = 23 \quad a = \frac{23}{8} = 2\frac{7}{8}$$

Ответ: при  $a = 5\frac{1}{8}$  или  $a = 2\frac{7}{8}$ .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

НЧ

$|ax-2a| \leq \sqrt{x-1}$   
Построим график ф-и  $y = |ax-2a|$  и  $y = \sqrt{x-1}$ .



Ордината по  $a$ ;  
Решением неравенства является закрашенная часть графика.

Значит, отрезок длиной  $\sqrt{3}$  находится внутри закрашенной части. Найдем точки пересечения графиков.

$$|ax-2a| = \sqrt{x-1}$$

$$ax-2a = \sqrt{x-1} \quad \text{или} \quad ax-2a = -\sqrt{x-1}$$

$$a(x-2) = \sqrt{x-1} \quad \text{или} \quad a(x-2) = -\sqrt{x-1}$$

$$a = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \rightarrow \text{координата по } a \leftarrow a = \frac{-\sqrt{x-1}}{x-2}$$

$$x = \frac{\sqrt{x-1}}{a} + 2 \rightarrow \text{координата по } x \leftarrow x = \frac{-\sqrt{x-1}}{a} + 2$$

$$\left( \frac{\sqrt{x-1}}{a} + 2; \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \right) \text{ и } \left( \frac{-\sqrt{x-1}}{a} + 2; \frac{-\sqrt{x-1}}{x-2} \right) - \text{искомые точки}$$

Представим вместо  $|ax-2a|$  одно из полученных значений. Например  $a = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \cdot x - \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} = \frac{\sqrt{x-1}(x-2)}{x-2} = \sqrt{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}}{a} + 2$$

П.к. нам известна 1 из точек.

$$\sqrt{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + 2a}{a}$$

$$-\sqrt{x-1} - \frac{\sqrt{x-1} + 2a}{a} = 0$$

$$\frac{a\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} + 2a}{a} = 0$$

$$a \neq 0$$

$$a\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} + 2a = 0$$

$$\sqrt{x-1}(a-1) + 2a = 0$$

$$a(\sqrt{x-1} + 2) = \sqrt{x-1}$$

$$a = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)}$$

$$\sqrt{x-1} + 2 = x - 1$$

$$\sqrt{x-1} = x - 3$$

$$x - 1 = x^2 + 16 - 8x$$

$$x^2 - 9x + 17 = 0$$

$$D = 21 - 68 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{13}}{2}$$

№5

Пусть количество рабочих первоначально  $z$ , время (в часах) которое они затрачивают  $t$ , тогда пусть объём работы 1.

$$\begin{cases} \frac{28}{z} \cdot t = 1 \\ \frac{21}{z+2} \cdot (t+1) = 1 \\ \frac{15}{z+4} \cdot (t+1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z \cdot 28 = 1 \\ (z+2) \cdot 21 = 1 \\ (z+4) \cdot 15 = 1 \end{cases}$$

Составим пропорцию:

$$(z+4) \cdot (t+1) = 15 \text{ дней}$$

$$(z+2) \cdot (t+1) = 21 \text{ день}$$

$$15(z+2)(t+1) = 21(z+4)(t+1)$$

$$15z + 30 = 21z + 84$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$15x + 30 = 21x + 84$$

$$6x = 54$$

$$x = 9$$

Ответ: первоначально было 9 рабочих.  
№2

Уп.к. нам дано 16-значное число для поиска с расположением 4-ех "9" подряд, то к-во вариантов их расположения в числе равно 13.

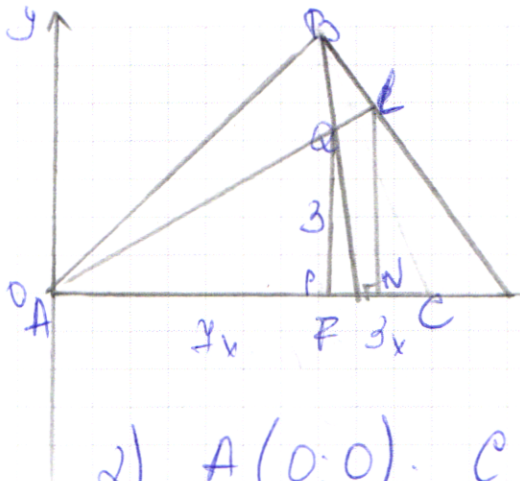
Далее, если необходимо, чтобы число "3" и "4" встречались хотя бы 1 раз, то предположим, что число "4" встречается только 1 раз, тогда возможен вариант, что остальные 11 позиций в числе займёт "3" (учитывая, что любые 4 позиции уже заняты "9"). Следовательно если рассматривать варианты, при которых 4 позиции "9", а остальные занимают "3" и "1" так, что они стоят подряд, при этом сначала 11 позиций - "3", и 1 позиция "4", а далее 10 позиций - "3", и 2 позиции "4", и т.д. Таких вариантов будет 11 только для 1-го из расположения 4-ех "9" подряд.

аналогично заменяя ранее 11 позиций "4"  
 1 позицию - "3" - и т.д. получаем ещё  
 11 вариантов для 1-го из положений  
 4-ех "9". Но т.к. возможен вариант и  
 другой. 4 позиции числа у нас занято,  
 свободно ещё 12 позиций. Вот вариант,  
 при котором чередуются "3" и "4" маши-  
 ная с "3" или с "4" одно одно из  
 положений 4-ех "9". Т.к. возможен вари-  
 ант, когда есть всего одно чередование,  
 а остальные цифры повторяются подряд.  
 Если начинать с "3" далее на следую-  
 щей свободной позиции "4", дальше  
 рассматривая, что "4" займёт не следую-  
 щую, а 2-ую свободную позицию, та-  
 ких вариантов так же будет 11. Анало-  
 гично рассматривая с "4" получим  
 11 вариантов только для 1-го из  
 положений 4-ех "9" подряд. Далее  
 необходимо посчитать сумму каждого  
 из вариантов умножив её на коли-во  
 возможных расположений подряд "4" и  
 "9" в 16-значном числе.

Получаем, что коли-во вариантов  
 по 1 из расположений 4-ех "9" подряд  
 равно 45. Умножаем 45 на 13 = 585  
 Ответ: 585 чисел.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N6

$$\frac{S_{\triangle BQAL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{7}{36}$$

Решение:

1) Введём систему координат.

2)  $A(0; 0); C(10x; 0); Q(y; 3)$

3)  $\vec{AC}(10x; 0); \vec{AQ}(y; 3)$

4) Сложим найти  $\cos \angle QAC$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Найдя  $\cos \angle QAC$ , можно найти AP, а следовательно и AF, FC и AC.

$$10xy + 0 = \sqrt{(10x)^2} + \sqrt{9y^2} \cdot \cos \alpha$$

$$10xy = 10x + 3y \cdot \cos \alpha$$

5) Сложим можно выразить AL, а дальше рассмотрим  $\triangle ALN$  и найти LN.

N4

П.к. Жюнокиа вообраз по 6 числах чисел из 4-ёх промежутков, то всего он вообраз 24 числа. Т.к. Он вообраз числа так, что их разность не делится на 30, то это могут быть числа 1, 32, 63, 94 и т.д.

Для наибольшего результата необходимо брать числа такими образам:

120	84	38	18
119	83	37	17
118	82	36	16
117	81	35	15
116	80	34	14
115	79	33	13

Скорее всего, наибольшей суммой будет являться сумма указанных чисел и это равно  $5 \cdot 200 + 5 \cdot 50 =$

$$1000 + 250 + 115 + 79 + 38 + 18 = 1500$$

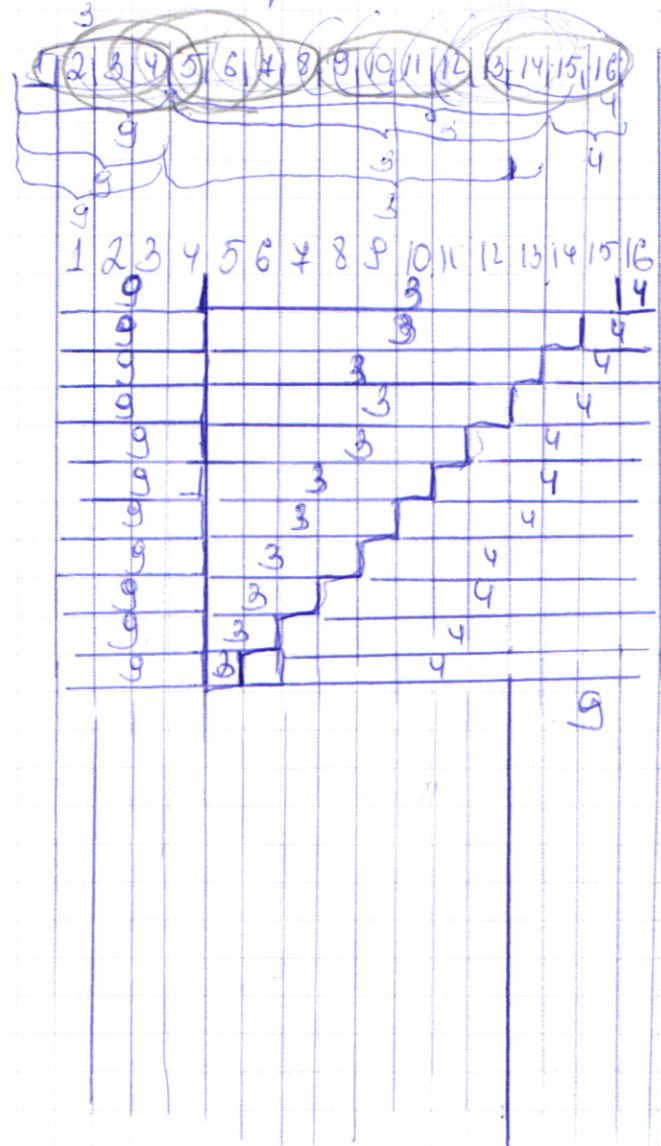
Ответ: 1500

№ abcdefgklmnopq

3/4/9  
Хотел бы 1 раз

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Все 9 - 1

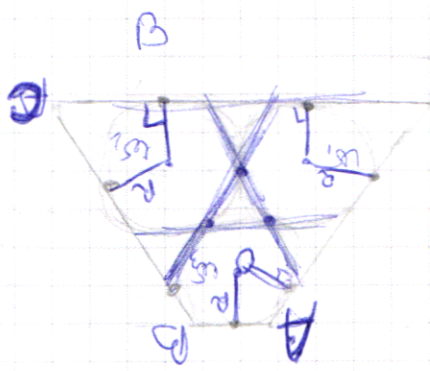


13

$$\begin{array}{r} + 1250 \\ + 115 \\ \hline + 1365 \\ + 56 \\ \hline + 1421 \\ + 49 \\ \hline 1500 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 2 \end{array} \Rightarrow +11=22$$

№3



$$-\sqrt{x-1} \leq a(x-2) \leq \sqrt{x-1}$$

$$a(x-2) \geq -\sqrt{x-1}$$
 при  $a=0, x \geq 2$

$$\begin{array}{r} x/4 \\ 4 \\ \hline 68 \end{array} \cdot 2$$

A

(1; 0)

D

$$\begin{array}{r} 81 \\ -68 \\ \hline 13 \end{array}$$

AD+BC - AB-CD=24

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

N1  $y = 2x^2 - 5x + 1$

$x_0 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$   $y_0 = 2 \cdot \frac{25}{16} - 5 \cdot \frac{5}{4} + 1 = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 1 = \frac{25}{8} - \frac{50}{8} + \frac{8}{8} = \frac{25 - 50 + 8}{8} = \frac{-17}{8}$

$= \frac{-25}{8} + 1 = \frac{-25}{8} + \frac{8}{8} = \frac{-17}{8} = 10\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = -(\frac{17}{8})^2 - (2\frac{1}{8})$

$y = -1$  и  $y = 2x^2 - 5x + 1$

$2x^2 - 5x + 1 = 1$

$2x^2 - 5x = 0$

$x(2x - 5) = 0$

$x = 0$  или  $x = \frac{5}{2}$

$2x^2 - 5x + 1 = 1$

$2x^2 - 5x = 0$

$x(2x - 5) = 0$

$x = 0$  или  $x = \frac{5}{2}$

$2x^2 - 5x + 1 > 0$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = 25 + 24 = 49 = 7^2$

$x_1 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$x_2 = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$b = DC = \sqrt{(3+\frac{1}{2})^2 + 0^2} = \sqrt{(\frac{6+1}{2})^2} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

$= \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

At 1) b и c - катеты, тогда гипотенуза  $d$

$d^2 = \frac{49}{4} + \frac{36}{4} = \frac{85}{4} = 21\frac{1}{4}$

2) b - гипот. c - катет, d - катет.

$d^2 = b^2 - c^2$

$x = \frac{\sqrt{58}}{2}$   $\frac{58}{4} = (x_2 - x_1)^2 + 0$

$\frac{5 + \sqrt{17+8a} - 5 - \sqrt{17+8a}}{4} = \frac{2\sqrt{17+8a}}{4} = \frac{\sqrt{17+8a}}{2}$

$= \frac{17+8a}{4} = \frac{58}{4}$

$17+8a = 58$

$8a = 41$

$a = \frac{41}{8}$

$2x^2 - 5x + a = 0$

$2x^2 - 5x + 1 - a = 0$

$D = 25 - 8(1-a) = 25 - 8 + 8a = 17 + 8a$

$17 + 8a \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{17}{8}$

$8a \geq -17$

$x_1 = \frac{5 + \sqrt{17+8a}}{4}$

$\frac{5 + \sqrt{17+8a}}{4}$

$\frac{5 + \sqrt{17+8a}}{4}$

$\frac{5 + \sqrt{17+8a}}{4}$

$\frac{5 + \sqrt{17+8a}}{4}$

$\frac{5 + \sqrt{17+8a}}{4}$

$\frac{5 + \sqrt{17+8a}}{4}$

$\frac{5 + \sqrt{17+8a}}{4}$

8=0.4

2 - 28 дней - t  
 (2+1)(1+1) - 28 дней  
 (2+4)(1+1) - 15 дней

2 + 1 - 28 дней

$$\frac{(2+4)(1+1) \cdot 21}{(2+1)(1+1) \cdot 15} = \frac{21}{15}$$

15(2+1)(1+1) = 21(2+4)(1+1)  
 15(2+2) = 21(2+4)

15y + 30 = 21y + 42

6y = 12 ⇒ y = 2

1000

84	250
-90	
54	1250
21+1	+115
23	1365
+22	56
45	1421
	+49
	1500

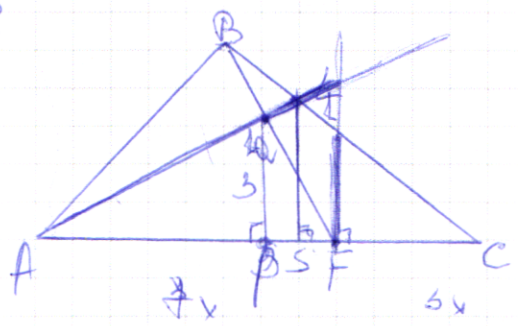
  

33	1
+14	
50	

585	38
	+18
	56

№6

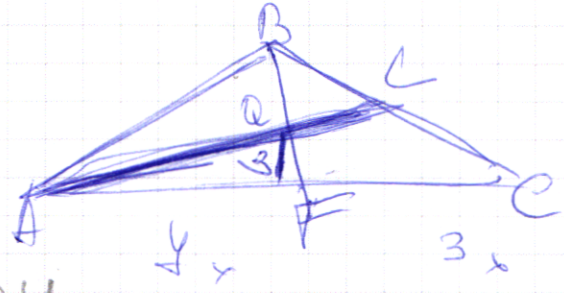


$\frac{S_{ABQ}}{S_{ABC}} = \frac{7}{36}$

№7 всего книжек в библиотеке 1460

a - b : 30

1 - 32 - 63



1000	+1460
+1115	18
49	1478
194	+4
38	1495
1232	+1
37	
1269	
36	
1200	
+115	
1315	
+49	
1394	

200	
+1200	
1400	
+60	
1460	

24  
 76  
 ---  
 56

200  
 +1200

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

$a \geq 0 \quad |ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$   
 $\sqrt{x-1} \geq 0 \quad ax - 2a \geq 0$   
 $x-1 \geq 0 \quad -2a = 0$   
 $x \geq 1 \quad a > 0 \text{ или } x^2 \geq 2$   
 $|x-2| = y$   
 $y \geq 0 \text{ или } x-2 \geq 0$   
 $x^2 \geq 2$   
 $2x-4 \geq 0$   
 $2x \geq 4$   
 $x \geq 2$   
 $|x-2| \geq 2$   
 $|2x-4| \geq 4$   
 $|3x-6| \geq 6$

$ax - 2a = \sqrt{x-1}$   
 $a(x-2) = \sqrt{x-1}$   
 $a^2(x-2)^2 = x-1$   
 $a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 = x-1$   
 $a^2x^2 - (4a^2+1)x + 4a^2+1 = 0$   
 $x = \frac{4a^2+1 \pm \sqrt{(4a^2+1)^2 - 4a^2(4a^2+1)}}{2a^2}$   
 $x = \frac{4a^2+1 \pm \sqrt{16a^4+8a^2+1 - 16a^4-4a^2}}{2a^2}$   
 $x = \frac{4a^2+1 \pm \sqrt{4a^2+1}}{2a^2}$   
 $x = \frac{4a^2+1 + 2a}{2a^2} = \frac{4a^2+2a+1}{2a^2} = \left(\frac{2a+1}{a}\right)^2$   
 $x = \frac{4a^2+1 - 2a}{2a^2} = \frac{4a^2-2a+1}{2a^2} = \left(\frac{2a-1}{a}\right)^2$

$AB = \sqrt{\left(2\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \left(2\frac{x-1}{a}\right)^2}$   
 $\sqrt{\frac{4x-4}{x+1} + \frac{4x-4}{a^2}} = 3$

$120/119/118/117/116/115/114/113$   
 $84/83/82/81/80/79$   
 $80$   
 $75$   
 $68$   
 $20$   
 $60$   
 $20$   
 $50$   
 $40$