

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

4-013

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2 - 5x + 1$  пересекает прямые  $y = -1$ ,  $y = 4$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 24$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$  является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 7 : 3$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $7 : 36$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 30]$ ,  $[31; 60]$ ,  $[61; 90]$ ,  $[91; 120]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.  $y = 2x^2 - 5x + 1$   
Верх.

$$x_0 = \frac{5}{4} \quad y_0 = -\frac{17}{8}$$

$$2x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$D: 25 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

При  $a \in (-\infty; -\frac{17}{8}]$  реше-  
ний нет.

Найдём точки пересечения с прямой

параболы:  $4 = 2x^2 - 5x + 1$ ;  $0 = 2x^2 - 5x - 3$ ;  $D: 25 - 4(-3) \cdot 2 = 49$

$$AB = 3,5$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{1}{2} \quad (\text{с } y = 4) \quad A(-\frac{1}{2}; 4) \quad B(3; 4)$$

$$CD = 1,5$$

$$-1 = 2x^2 - 5x + 1; \quad 0 = 2x^2 - 5x + 2; \quad D: 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{с } y = -1) \quad C(\frac{1}{2}; -1) \quad D(2; -1)$$

Чтобы треугольник существовал надо, чтобы большая  
сторона была меньше суммы 2-ух других сторон.

Значит: при  $a \in [-\frac{17}{8}; -1]$  решений нет.

Чтобы треугольник был прямоугольным, нужно,

чтобы к нему применился теорема Пифагора.

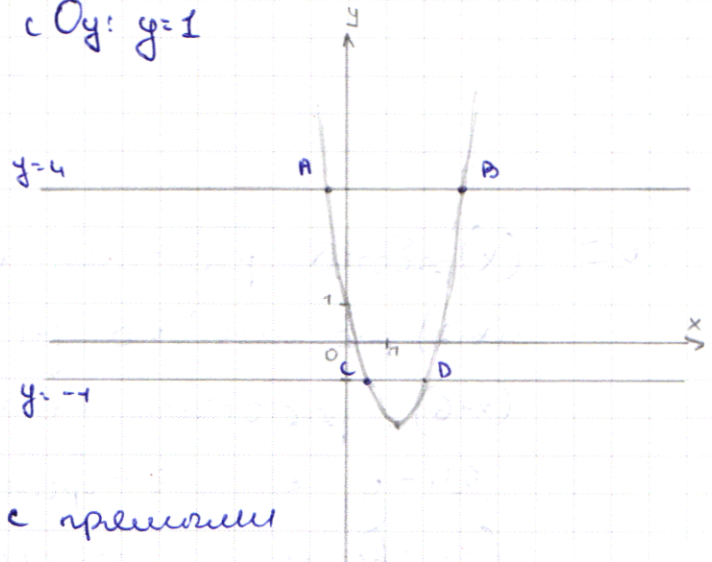
Если отрезок образованный  $a$  большая сторона:

$$a_{\text{отр}}^2 = (1,5)^2 + (3,5)^2 = 14,5, \quad a_{\text{отр}} = \sqrt{14,5}$$

Если отрезок образованный  $a$  меньше 3,5, то:

$$(3,5)^2 = (1,5)^2 + (a_{\text{отр}})^2; \quad (a_{\text{отр}})^2 = 10; \quad a_{\text{отр}} = \sqrt{10}$$

$$a = 3 \quad \text{и} \quad a = 5 \quad \text{Ответ: } a = 3 \text{ и } a = 5.$$

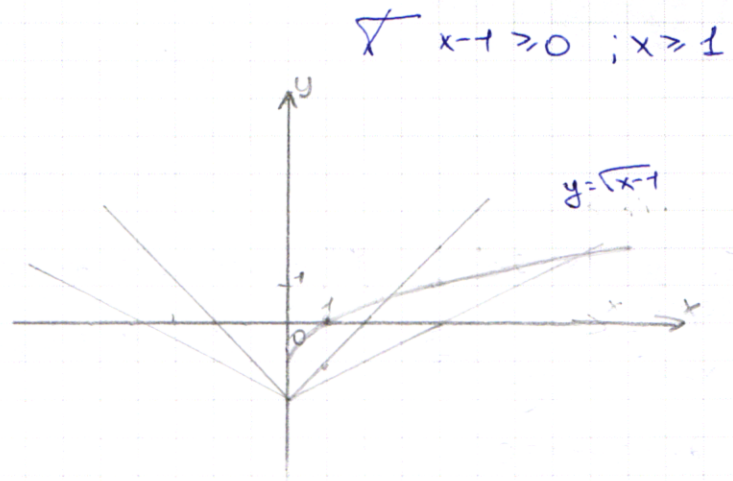




$$14 \quad |ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$y = |ax - 2a| \quad \text{и} \quad y = \sqrt{x-1}$$

$$y = |a(x-2)| \quad y = \sqrt{x-1}$$



15. (x) работами работами по y часов в день - 28g (672z)  
 (x+2) работами по y+1 часов в день - 21g (504z)  
 (x+6) работами по y+2 часов в день - 15g (360z)

$24 - y = z$  z - время бездействия.

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} 672 - 2x = xy \\ 504 - (z-1)(x+2) = (x+2)(y+1) \\ 360 - (z-2)(x+6) = (x+6)(y+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 672 - 2x = xy \\ 504 - 2x - 2z + x + 2 = xy + x + 2y + 2 \\ 360 - 2x - 6z + 2x + 12 = xy + 2x + 6y + 12 \end{cases}$$

$$504 - 2x - 2z + x - 504 - 360 - 2x + 2x - 2z + 6z = xy + 2y - xy - 6y$$

$$504 - 360 + 4z = -4y$$

$$144 = -4y - 4z \quad (24 - z = y)$$

$$144 = -4y - 4(24 - y)$$

$$144 = -4y - 96 - 4y$$

$$240 = (-8y)$$

$y = 3z$  - выработка в день работы одного рабочего.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

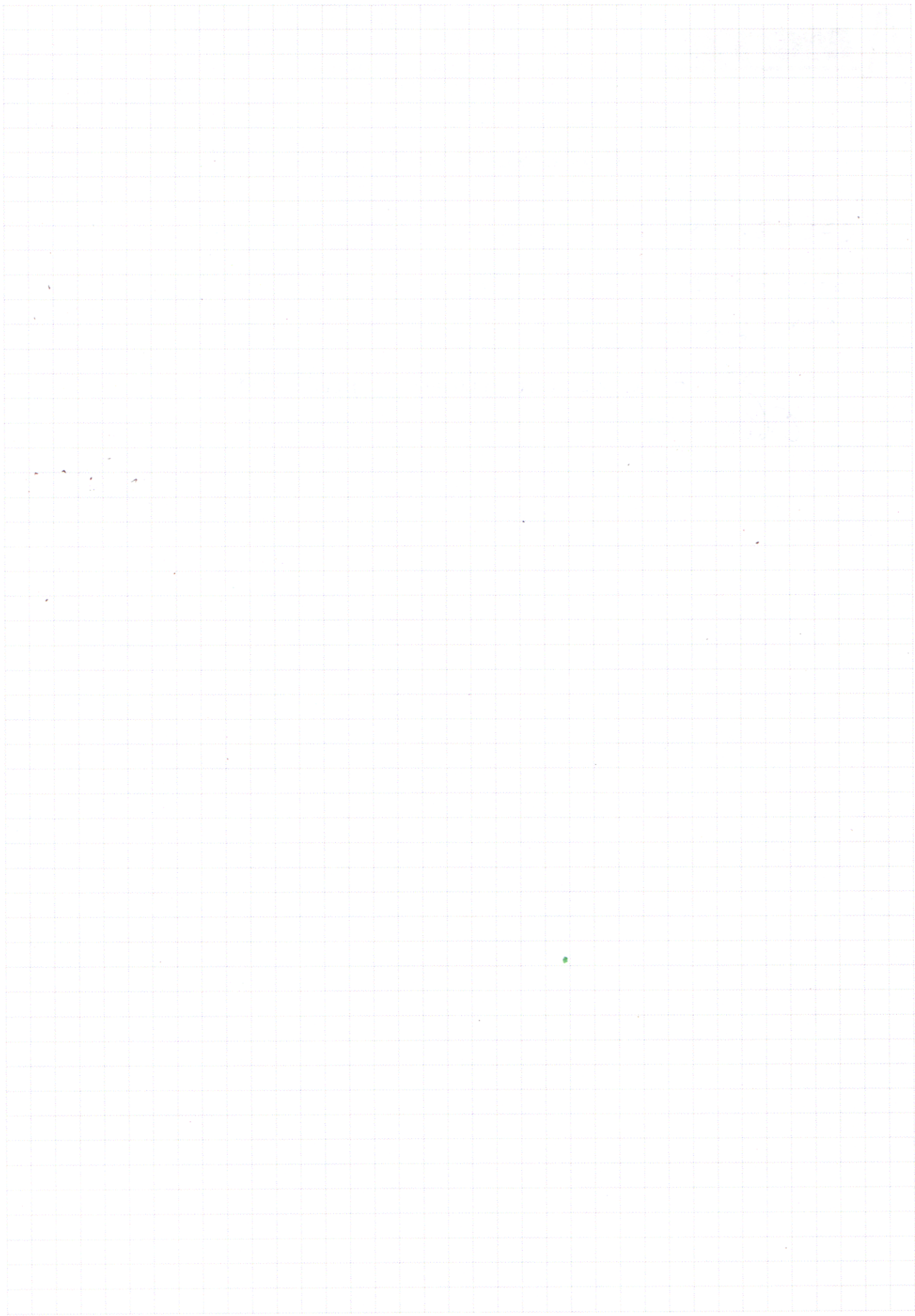
$$672 - 2x = xy$$

$$672 - 21x = 3x$$

$$672 = 24x$$

$x = 28$  - исконое число рабочих

Ответ: 28



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AD + BC = AB + CD + 24$$

$$x \geq 1$$

$$\begin{cases} ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 2a \geq -(\sqrt{x-1}) \end{cases}$$

$$\{(ax - 2a)^2 \leq x - 1$$

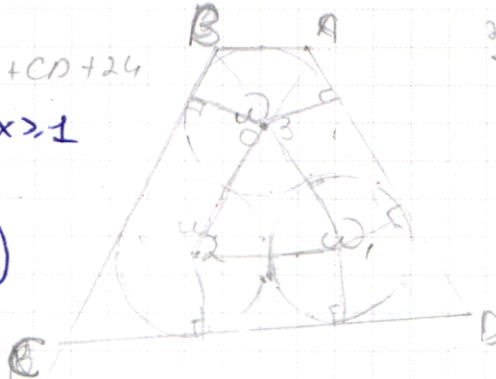
$$ax - 2a \geq -x + 1$$

$$\begin{cases} a^2(x-2)^2 \leq x-1 \\ a^2(x-2)^2 \geq 1-x \end{cases}$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$a^2 \geq \frac{1-x}{(x-2)^2}$$



$$2x^2 - 5x - 2$$

$$D: 25 \pm 4 \cdot 26 = 51 \pm 104$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{141}}{4}$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{141}}{4}$$

$$\frac{114}{4} = 28.5$$

$$-1.4$$

(x) рабочих работают по y часов в день - 28 дней

(x+2) рабочих работают по (y+1) часов в день - 21 день

(x+6) рабочих работают по (y+2) часов в день - 15 дней

Сколько было рабочих?

всё работа = 1

$$24 - z = y$$

$$y = \frac{24 - z}{1}$$

z - время одного

$$672 - 2z = xy$$

$$144 + 96 = -8y$$

$$240 = -8y$$

$$504 - (z-1)(x+2) = (x+2)(y+1)$$

$$y = 32$$

$$360 - (z-2)(x+6) = (x+6)(y+2)$$

$$212$$

$$\begin{cases} 672 - 2z = xy \\ 504 - 2z - 2z + x + 2 = xy + x + y + 2 \\ 360 - 2z - 6z + 2x + 12 = xy + 2x + y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 672 - 2z = xy \\ 504 - 2z - 2z - (360 - 2z - 6z) = xy + x + y + 2 - xy - 2x - y - 2 \end{cases}$$

$$504 - 2z - 2z - 360 + 2z + 6z = 0$$

$$360 - 2z - 6z + 2x + 12 = xy + 2x + 6y + 12$$

$$504 - 2z - 2z - (360 + 2z + 6z) = xy + x + y + 2 - xy - 2x - y - 2$$

$$504 - 360 + 4z = -4y$$

$$(24 - z) = 2z$$

$$504 - 360 = -4y - 4z$$

$$144 = -4y - 4(24 - y)$$

$$144 = -4y - 4z$$

$$144 = -4y - 96 - 4y$$

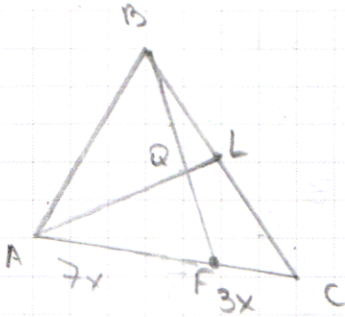




черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



чтобы число делилось на 30  
надо, чтобы оно оканчивалось  
на 0 и сумма его цифр  
была делилась на 3

Значит у данных промежутков  
числа которые делятся на 30:

30 30 60 120 больше

чисел нет. Значит разность

двух модных чисел не должна равняться  
данным.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \hline 35 \\ 35 \\ \hline 70 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times 15 \\ \hline 15 \\ 75 \\ \hline 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\frac{x}{y} = 28$$

$$x = 28y$$

$$(y+1)(x+2) = 21$$

$$28y^2 + 2y + 28y + 2 = 21$$

$$28y^2 + 30y - 19 = 0$$

$$D = 900 - 4 \cdot 28 \cdot 19 = 468$$

$$x_2 - x_1 = \sqrt{D}$$

$$\sqrt{D} - x_1 = x_2$$

$$\begin{cases} \sqrt{D} + x_1 = 2x_2^2 - 5x_2 + 1 \\ \sqrt{D} - x_1 = 2x_1^2 - 5x_1 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 28 \\ \hline 196 \\ 252 \\ \hline 196 \\ \hline 532 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ \hline 44 \\ \hline 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ \hline 21 \\ \hline 21 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$(y+1)(x+2) = 21$$

$$x \cdot y = 28 = 1$$

$$\frac{1}{28} = x \cdot y$$

$$\frac{1}{21} = (x+2)(y+1)$$

$$\frac{1}{15} = (x+6)(y+2)$$

$$\frac{1}{15} = xy + 2x + 6y + 12$$

$$\frac{1}{15} = 28 + 2x + 6y + 12$$

$$\frac{1}{15} = 28 + 2x + 6y + 12$$

$$\begin{array}{r} \times 3,1 \\ 3,1 \\ \hline 9,31 \\ \hline 9,61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 3,2 \\ 3,2 \\ \hline 6,4 \\ \hline 9,6 \\ \hline 10,24 \end{array}$$

$$|ax-2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$(ax-2a)^2 \leq |x-1|$$

$$ax-2a$$

$$(a(x-2))^2 \leq |x-1|$$

$$\text{Если } a \geq 0 \text{ и } x \geq 2 \text{ то } a^2(x-2)^2 \leq x-1$$

$$a^2(x^2+4-4x) \leq$$

$$2a = y+z$$

$$2a-z=y$$

$$\begin{cases} 672-2x = xy \\ 504 - (z-1)(x+2) = (x+2)y \\ 360 - (z-2)(x+6) = (x+6)y \end{cases}$$

$$672-2x = xy$$

$$672-2x = x(24-z)$$

$$672-2x = 24x - zx$$

$$672 + zx - 2x = 24x$$

$$\frac{672}{24} = x$$

$$672-2x = xy$$

$$x(24-z)$$

$$672-2x = 24x - zx$$

$$672 = x$$

$$(x+6)(464-23x)$$

$$464x - 23x^2 + 6 \cdot 464 - 23 \cdot 6x$$

$$464x - 23 \cdot 6x$$

$$672-2x$$

$$672 - \frac{2x}{2} = xy$$

$$xy - z$$

$$672 = xy - z$$

$$441 = (x+2)y - (z-1)$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 28 \\ \times 24 \\ \hline 112 \\ 56 \\ \hline 672 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 24 \\ \hline 84 \\ 42 \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\begin{cases} 672 - 2x = xy \\ 504 - (z-1)(x+2) = (x+2)y \\ 360 - (z-2)(x+6) = (x+6)y \end{cases}$$

$$504 - (z-1)(x+2) = (x+2)y$$

$$(x+2)(24-z)$$

$$24x - xz + 48$$

$$504 - 2z + x + 2 = 24x + 48$$

$$504 - 2z + x + 2 = 24x + 48$$

$$672 - 2x = xy$$

$$504 - (z-1)(x+2) = (x+2)(y+1)$$

$$504 - (24-y-1)(x+2) = (x+2)(y+1)$$

$$458 - 2z = 23x$$

$$360 - (z-2)(x+6) = (x+6)(\frac{z-1}{24-z})$$

$$2z = 23x - 458$$

$$360 - \left( -\frac{23x-458}{2} - 2 \right) (x+6)$$

$$360 - \left( \frac{458+4-23x}{2} \right) (x+6)$$

$$360 - \left( \frac{464-23x}{2} \cdot \frac{(x+6)}{1} \right)$$

$$360 - \left( \frac{464-23x}{2} \cdot \frac{(x+6)}{1} \right)$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

$$x_0 = \frac{5}{4} \quad D: 25 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 17$$

$$y_0 = 2 \cdot \frac{25}{16} - 5 \cdot \frac{5}{4} + 1 = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 1 = -\frac{25}{8} + 1 = \frac{17}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \approx \frac{5 \pm 4.1}{4} \approx \frac{9.1}{4} \approx 2.275$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \approx \frac{5 - 4.1}{4} \approx \frac{0.9}{4} \approx 0.225$$

Пересечение с Oy:  $y = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 1 = 1$

При  $a \in (-\infty; \frac{17}{8}]$  решений нет.

$$4 = 2x^2 - 5x + 1 \quad ; \quad 0 = 2x^2 - 5x - 3 \quad D: 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$-1 = 2x^2 - 5x + 1 \quad ; \quad 0 = 2x^2 - 5x + 2 \quad D: 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \quad ; \quad 2; \quad 1$$

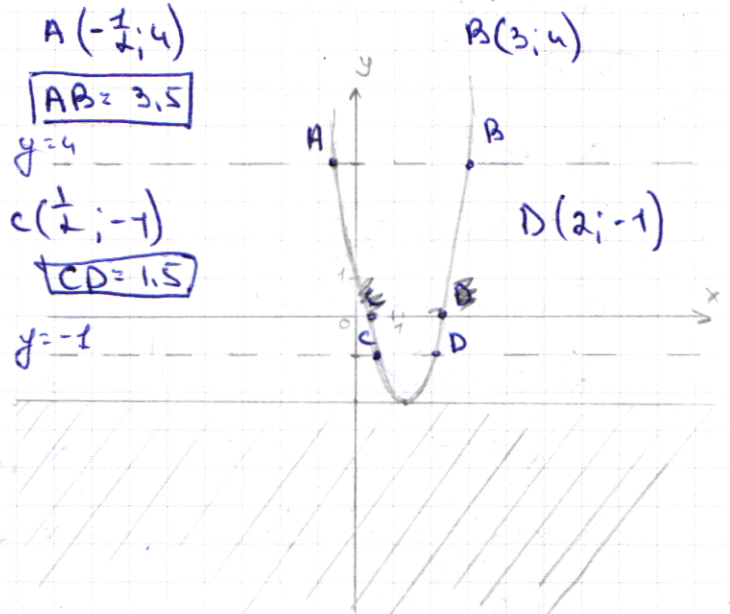
Чтобы  $\Delta$  было равно нулю, надо, чтобы большая сторона была меньше или равна другой.  $\Rightarrow$  при  $a \in [-\frac{17}{8}; -1]$  решений тоже нет.  
Если отрезок  $a$  будет больше стороны, то должно выполняться теорема Пифагора

$$a^2 = (1.5)^2 + (3.5)^2 = 2.25 + 12.25 = 14.5 = a_{\text{кр}}^2 = \sqrt{14.5}$$

Если  $a \in (-1; 4)$  то должно выполняться

$$12.25 = 2.25 + a^2$$

$$10 = a^2 \quad a_{\text{кр}} = \sqrt{10}$$



$$x-1 > 0 \\ x > 1$$

$$\text{н.д. } |ax-2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$y = |ax-2a| ; y = |a(x-2)|$$

$$y = \sqrt{x-1}$$

$$(ax-2a)^2 \leq x-1$$

$$a^2 x^2 + 4a^2 - 8a^2 x \leq x-1$$

$$a^2 (x^2 + 4 - 8x) \leq x-1$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{x^2+4-8x}$$

$$x = 28$$

$$x+2 = 21 + (x+2)$$

$$x+6 = 15 + x$$

$$\begin{cases} xy = 28 \\ (y+1)(x+2) = 21 \\ (y+2)(x+6) = 15 \end{cases}$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 10$$

$$10 + (y_2 - y_1)^2 = 10$$

$$y_2 - y_1 = 0$$

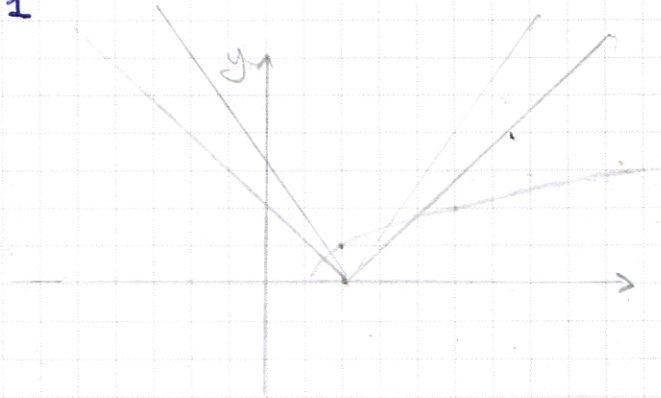
$$: y_2$$

н.д.

$$x_1 \quad x_2 \quad y_1$$

$$x_2 - x_1$$

9999 34 34 34 34 34 34



y - время работы одного

x раб. — 28 дней.

x+2 раб. — 21 день

x+6 раб. — 15 дней.

$$x = \frac{28}{y}$$

$$y \neq 0 \quad x \neq 0$$

$$(y+1) \cdot \left( \frac{28}{y} + 2 \right) = 21$$

$$(y+2) \cdot \left( \frac{28}{y} + 6 \right) = 15$$

$$y \cdot \left( \frac{28}{y} \right) + 2y + \frac{28}{y} + 2 = 21$$

$$28 + 2y + \frac{28}{y} + 2 = 21 \quad | \cdot y$$

$$28y + 2y^2 + 28 + 2y = 21y$$

$$30y + 2y^2 + 28 - 21y = 0$$

$$9y + 2y^2 + 28 = 0$$

$$2y^2 + 9y + 28 = 0$$

$$D: 81 - 4 \cdot 28 \cdot 2 = < 0$$

а)  $\emptyset$