

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

4-014

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{} = 1$$

Для того, чтобы в треугольнике две углы 120° (d), длина вышележащая сторона T косинусов:

Δ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \alpha$, где AB , BC и AC — стороны треугольника. Пусть $AB = d$, $BC = f$, $AC = g$; $\alpha = 120^\circ$;

Нетрудно заметить, что две стороны треугольника как углы равны, вернее их можно найти из условия:

- 1-я сторона: $98 = 2x^2$; $x = \pm 7 \Rightarrow$ сторона равна $7 + 1 - 7 = 14$;

- 2-я сторона: $18 = 2x^2$; $x = \pm 3 \Rightarrow$ сторона равна $3 + 1 - 3 = 6$;

Заметим, что я не называю стороны, т.к. в данной ситуации существует два варианта решения; решим их и найдем параметр a :

1) 14 — большая сторона, т.е. $d = 14$, тогда $f = 6$; найдем g :

$$14^2 = 6^2 + g^2 - 2 \cdot 6 \cdot g \cdot \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 36 + g^2 + 6g; \quad g^2 + 6g - 160 = 0; \quad \text{по т. Виета } g = 10 \text{ или } g = -16, \text{ но}$$

$$g > 0 \Rightarrow g = 10; \quad g = 2x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow a = 2 \cdot 25 = 50. \text{ — решение 1 случая;}$$

2) 6 — большая сторона, т.е. $z = d$, $f = 14$, $g = 6$; найдем z :

$$z^2 = 36 + 196 - 2 \cdot 36 \cdot 196 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$z^2 = 232 + 8768;$$

$$z^2 = 7000; \quad x^2 = \frac{z^2}{4} \Rightarrow x^2 = 1750 \Rightarrow a = 3500$$

и рассмотрим всего 2 варианта, т.к. 6 не может быть большой стор.

Ответ: 50 или 3500.

$\sqrt{5}$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1;$$

$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4)$; применим метод рационализации
учитывая область ОДЗ;

$$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0, \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-1 \neq 1 \\ x+4 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ОДЗ: } x \in (-4; \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty).$$

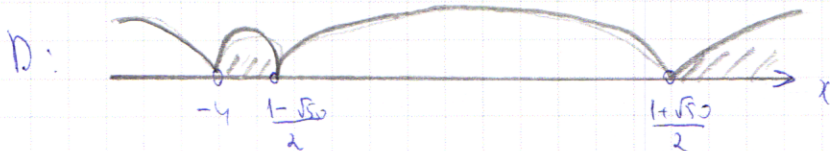
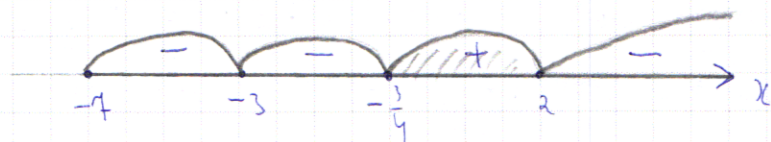
Решим неравенство 1:

$$y = (\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0$$

$$\emptyset: x \geq -4$$

$$\text{Кум: } -3; 2; -\frac{3}{4};$$

Р. и. и. и. !



Как видно: на \mathbb{R} нет решений;

Ответ: нет решений в действительных числах (\emptyset).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 04

После многочисленных способов решения данной задачи я предполагаю, что данные числа (выбранные) будут представлять собой некую закономерность. И действительно некая закономерность обнаружилась. Я могу сформулировать её так:

" Числа, выбранные из каждой группы, представляют собой последовательность (+1), а каждая следующая группа чисел из следующей группы чисел равна $a_5 + 45$, где a_5 - последний число из предыдущей группы чисел."

То есть, вернее всего, последовательность будет выглядеть следующим образом:

	[1; 45]	[46; 90]	[91; 135]	[136; 180]	[181; 225]	
1	1	51	101	151	201	
2	2	52	102	152	202	
3	3	53	103	153	203	
4	4	54	104	154	204	
5	5	55	105	155	205	
Σ	15	+ 265	+ 515	+ 465	+ 1015	=
	= 2575					

Ответ: 2575.

№ 3

При исследовании задачи нетрудно заметить, что при задании, что числа могут стоять в разном порядке и все они различны, ответ был бы $17!$, но у нас есть некоторые ограничения, которые уменьшают число $17!$; далее будем просто вычитать различные вариации, ограниченные условиями:

1) Цифра "8" равна семи, они идут подряд:

$$17! - 7!;$$

2) Число "0" (цифры) не может быть первым:

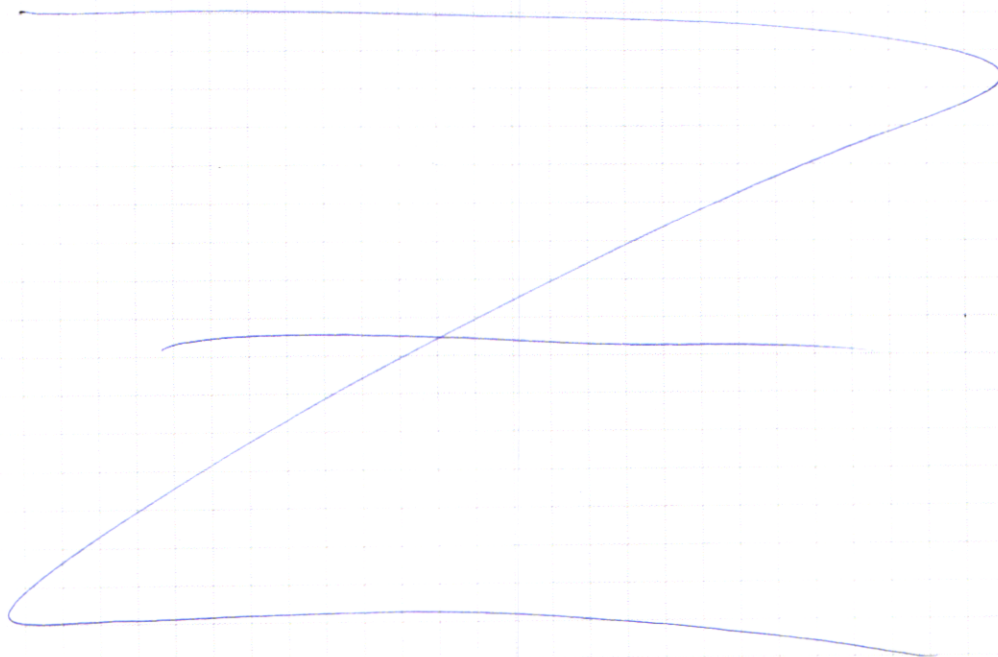
$$17! - 7! - (11! / 2);$$

Можно также преобразовать данное выражение и получить ответ:

$$17! - 7! - \frac{11!}{2} = 7! \cdot (17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 - 1) - \frac{11 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1}$$

$$= 7! \cdot \left(\frac{17!}{4!} - 1 \right) - \frac{11!}{2}$$

Ответ: $7! \cdot \left(\frac{17!}{4!} - 1 \right) - \frac{11!}{2}$.



6. 80000000007

0

~~101~~

110

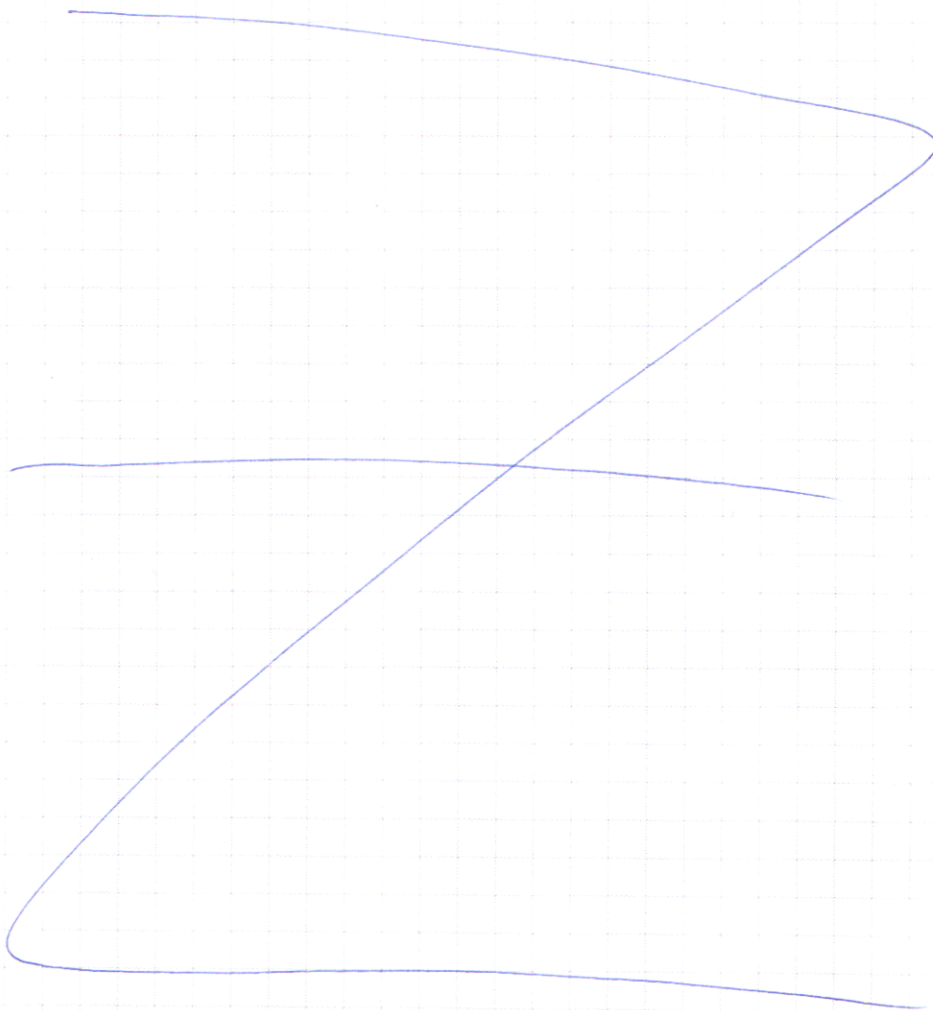
101

~~010~~

~~001~~

~~011~~

100



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6657

6676

6766

7666

6677

6767

6776

7667

7676

7766

7776

7767

7677

6777

667

676

766

677

767

776

$$3! + 2! + \frac{3! \cdot 1!}{2!}$$

$$12 \cdot \frac{2! \cdot 4! + 2!}{2!}$$

78/4

3!

21/9

$$\frac{4! \cdot 7!}{12 \cdot 2!} = 6$$

$$3! + \frac{2 \cdot 4! \cdot 1!}{3!}$$

3!

1
2
3
4
5

1 2 3
1 3 2
2 3 1
2 1 3
3 1 1
3 2 1

6!

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11 = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7

7! (~~7. 2. 3.~~ 8. 9. 10. 11 - 1)

66 77

~~677 66~~

7676

7667

6767

6776

6677

6767

6776

4!

~~6666~~
~~6667~~

3!

~~666~~

667

676

766

677

767

766

~~777~~

70

67

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[1; 45]

[46; 90]

[91; 135]

[136; 180]

[180; 225]

$b - a \neq 45, 90, 135, 180, 225$

1 47 102

2 49 103

5 51 104

7 53 105

9 55 106

$$\begin{array}{r} 91 \\ - 47 \\ \hline 44 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 94 \\ - 45 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 102 \\ - 45 \\ \hline 57 \end{array}$$

| | | | | |
|---|----|-----|-----|-----|
| 1 | 51 | 101 | 151 | 201 |
| 2 | 52 | 102 | 152 | 202 |
| 3 | 53 | 103 | 153 | 203 |
| 4 | 54 | 104 | 154 | 204 |
| 5 | 55 | 105 | 155 | 205 |

$$\begin{array}{r} 201 \\ - 155 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ - 45 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 155 \\ - 45 \\ \hline 110 \end{array}$$

$1000 + 15 = 1015$

$500 + 150 + 15 = 765$

$500 + 15 = 515$

$250 + 15 = 265$

15

$250 + 15$

1
+ 250
+ 500
+ 150
+ 1000
2500

+ 15 · 5

2575

68888860000000007

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4)$$

$$(\sqrt{x+7} - x - 1) (x+4 - \sqrt{x+7} + x) \geq 0$$

Ответ: 2; ~~3~~
 Ответ: 2;

$$\sqrt{x+7} = 1+x$$

$$x+7 = 1+2x+x^2$$

$$x^2+x-6=0$$

$$x=2$$

$$x=-3$$

$$\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$$

$$\sqrt{x+7} = x+1$$

$$x+7 = x^2+2x+1$$

$$x^2+x-6=0$$

$$x=2$$

$$x=-3$$

$$\frac{x+16}{144}$$

$$x-1 = 16$$

$$x = 17$$

$$2x+4 = \sqrt{x-7}$$

$$4x^2 + 16x + 16 = x-7$$

$$4x^2 + 15x + 23 = 0$$

$$D = 225 - 144 = 81$$

$$\sqrt{D} = \pm 9$$

$$x = \frac{-15 \pm 9}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{225}{144}$$

$$\sqrt{x+7} > x$$

$$x+7 > x^2$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 50; \sqrt{D} = \pm \sqrt{50}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{50}}{2}$$

$$x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{50}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{50}}{2}; +\infty)$$

$$x \in [-4; +\infty)$$

$$x \in (-\infty; 2)$$

$$x \in (-\infty; 2) \cap [-4; +\infty) = [-4; 2)$$

$$x \in (-\infty; 2) \cap (-\infty; 2) = (-\infty; 2)$$

$$x \in (-\infty; 2) \cap (-\infty; 2) = (-\infty; 2)$$

$$x \in (-\infty; 2) \cap (-\infty; 2) = (-\infty; 2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 3384 & 2 \cdot 2 \\ 846 & 2 \\ 423 & 3 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{1692} \\ 1692 \end{array}$$

$$z = 2x$$

$$x = \frac{z}{2}$$

$$x^2 = \frac{z^2}{4} = 846$$

$$z = 1692$$

$$36 = 196 + z^2 + 14z$$

$$z^2 + 14z + 160 = 0$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{186} \\ 36 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{3384} \\ 2 \\ \hline 6768 \\ 232 \\ \hline 1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{1000} \\ 4 \\ \hline 16 \\ 30 \\ \hline 26 \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6768 & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 423 & 3 \\ 141 & 3 \\ 47 & 47 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{1750} \\ 3500 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

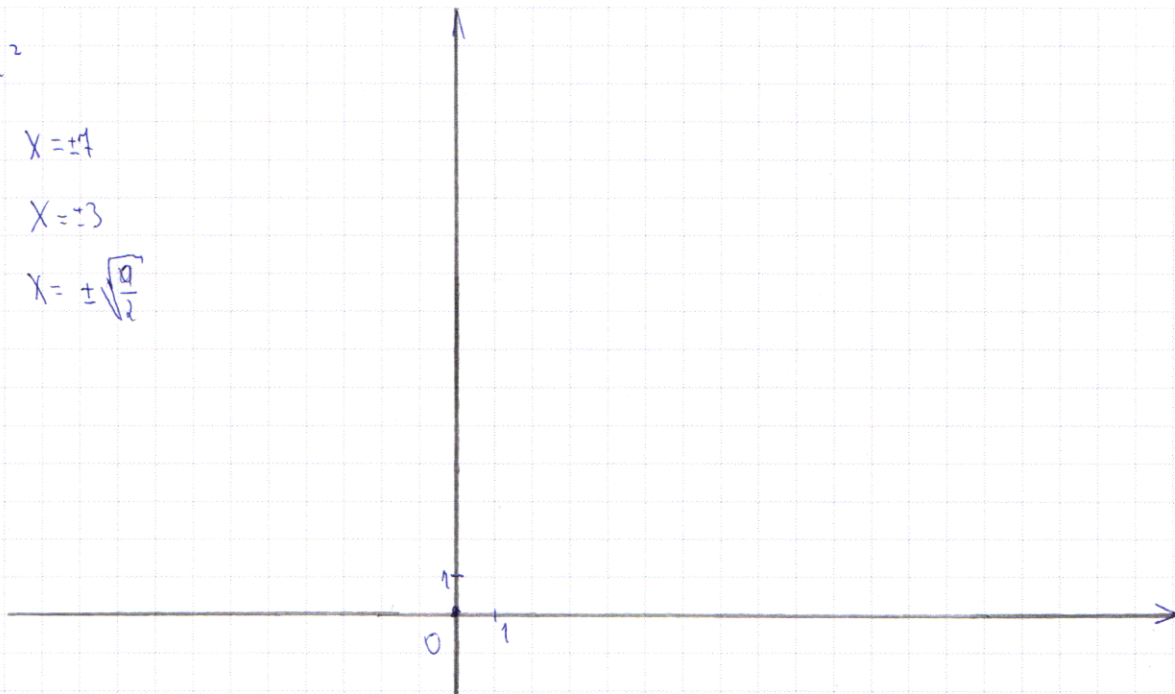
1) $y = 2x^2$

$y = 8 \quad X = \pm 2$

$y = 18 \quad X = \pm 3$

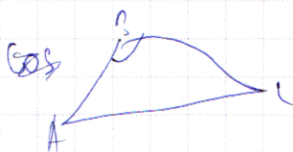
$y = 9 \quad X = \pm \sqrt{\frac{9}{2}}$

$\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$



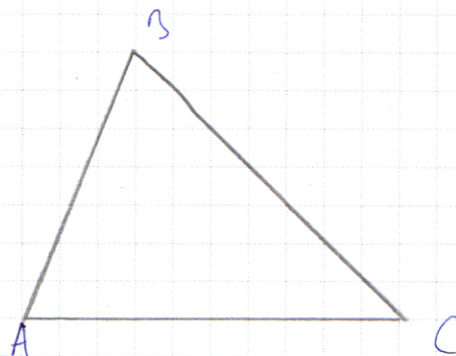
$\alpha = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$

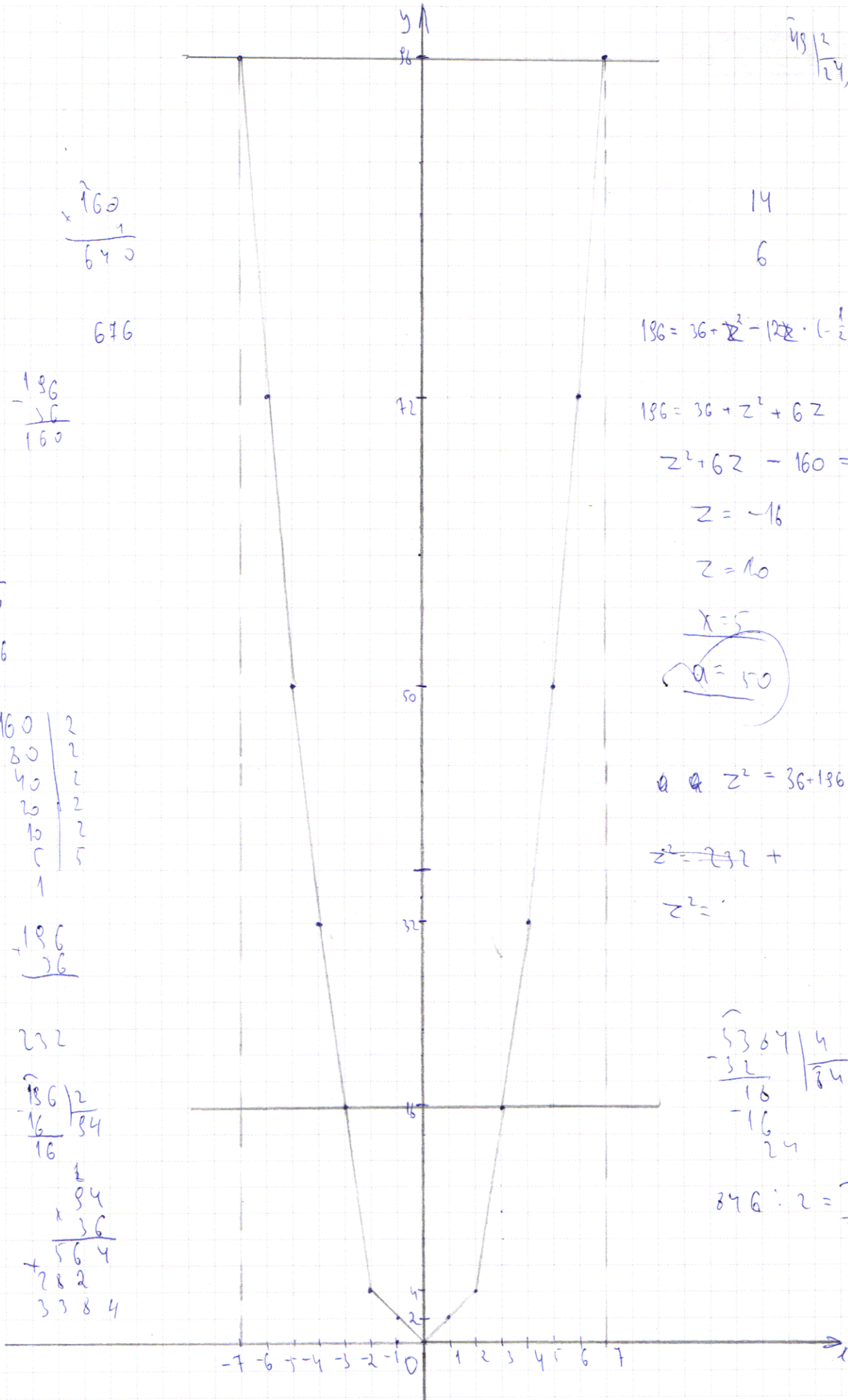
$\cos \alpha = -\frac{1}{2}$



$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \alpha$

$\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$





$$\begin{array}{r} \times 160 \\ \hline 640 \end{array}$$

646

$$\begin{array}{r} 196 \\ - 36 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ + 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 160 & 2 \\ 30 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ - 36 \\ \hline 232 \end{array}$$

232

$$\begin{array}{r} 196 \mid 2 \\ \hline 16 \quad 94 \\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 94 \\ \hline 36 \\ + 564 \\ \hline 282 \\ 3384 \end{array}$$

$$\sqrt{49} \mid 2 \\ \hline 24,5$$

14

6

$$196 = 36 + z^2 - 12z \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$196 = 36 + z^2 + 6z$$

$$z^2 + 6z - 160 = 0$$

$$z = -16$$

$$z = 10$$

$$\begin{array}{r} x=5 \\ \hline a=150 \end{array}$$

$$z^2 = 36 + 196 - 36 \cdot 196 \cdot (-\frac{1}{2})$$

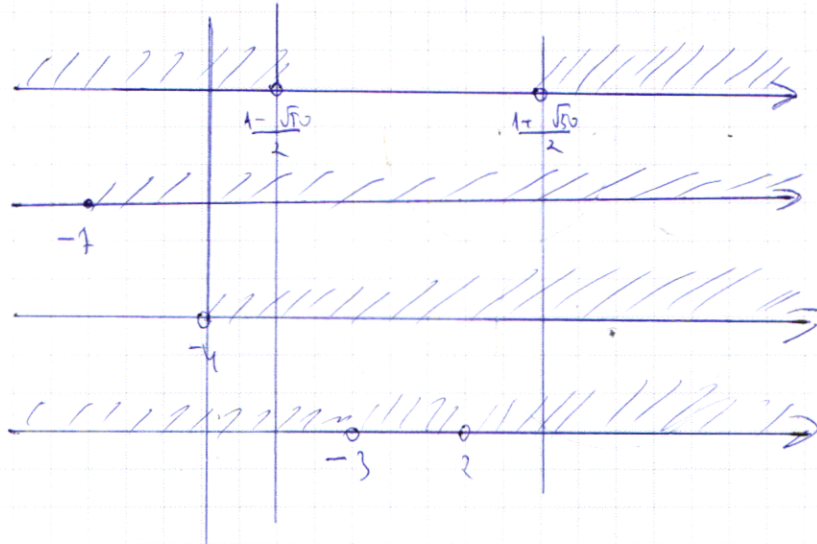
$$z^2 = 232 +$$

$$z^2 =$$

$$\begin{array}{r} 5304 \mid 4 \\ \hline 32 \quad 846 \mid 4 \\ 16 \quad 24 \\ -16 \quad 24 \end{array}$$

$$846 : 2 = 423 \mid 3 \\ \hline 3 \quad 1413 \\ 12 \quad 144$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) $x+7 = x^2+2x+1$
 $x =$

$\frac{16}{9}$

$$\sqrt{x+7} = 2x+1$$

$$x+7 = 4x^2 + 16x + 16$$

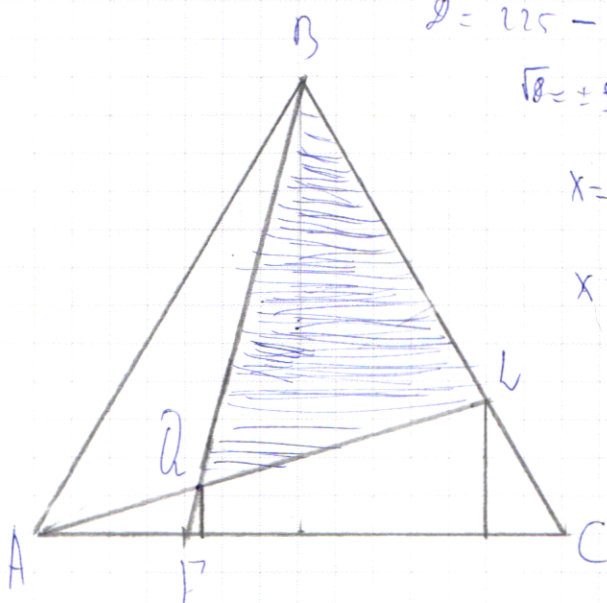
$$4x^2 + 15x + 9 = 0$$

$$D = 225 - 144 = 81$$

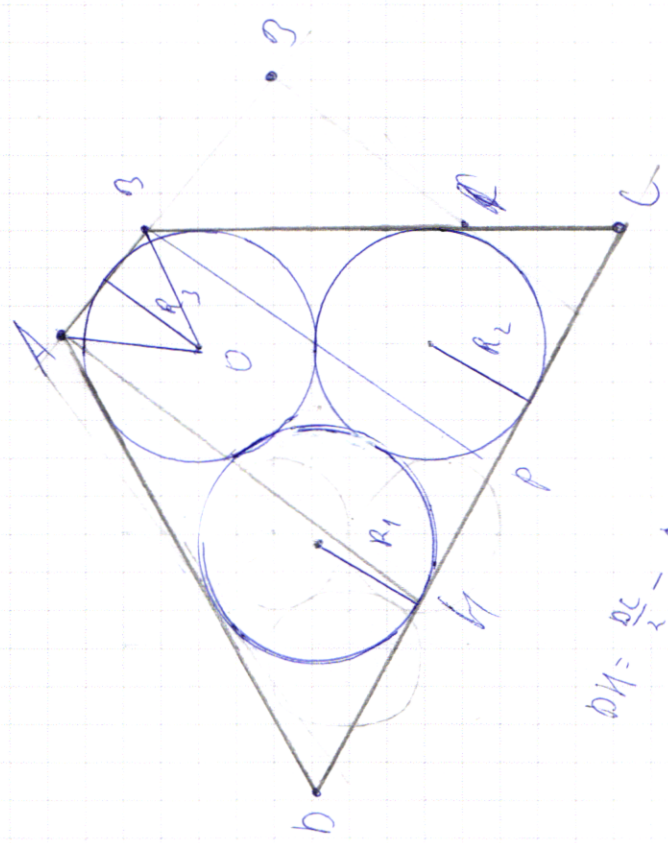
$$\sqrt{D} = \pm 9$$

$$x = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x = \frac{-15-9}{8} = -3$$



$$AD + BC - AB - DC = 12$$



$$DH = \frac{BC}{2} - \frac{AS}{2}$$

