

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

4-046

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\text{Длина отрезка } \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} =$$
$$= \frac{2\sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

① $y = 2x^2 - 5x + 1; \quad y = -1$

$$2x^2 - 5x + 1 = -1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$\Delta x_1 = \frac{3}{2} = \underline{1,5}$$

② $y = 2x^2 - 5x + 1; \quad y = 4$

$$2x^2 - 5x + 1 = 4$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$\Delta x_2 = \frac{4}{2} = \underline{3,5}$$

1 см.

Δx_1 и Δx_2 — катеты, тогда

$$\Delta x_3 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2} = \sqrt{2,25 + 12,25} = \sqrt{14,5}$$

③ $y = 2x^2 - 5x + 1; \quad y = a$

$$2x^2 - 5x + 1 = a$$

$$2x^2 - 5x + (1 - a) = 0$$

$$D = 25 - 8(1 - a) = 17 + 8a$$

$$\Delta X_3 = \frac{\sqrt{17+8a}}{2}$$

$$\sqrt{17+8a} = 2\sqrt{14,5}$$

$$\sqrt{17+8a} = \sqrt{58}$$

$$17+8a = 58$$

$$8a = 41$$

$$a = \frac{41}{8} = \underline{5,125}$$

2 слуг.

ΔX_1 — катет; ΔX_2 — гипотенуза, тогда

$$\Delta X_3 = \sqrt{\Delta X_2^2 - \Delta X_1^2} = \sqrt{12,25 - 2,25} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{17+8a} = 2\sqrt{10}$$

$$\sqrt{17+8a} = \sqrt{40}$$

$$17+8a = 40$$

$$8a = 23$$

$$a = \frac{23}{8} = 2\frac{7}{8} = \underline{2,875}$$

Ответ: 2,875; 5,125

№4 $S = 120 + 119 + 118 + 117 + 116 + 115 + 84 + 83 + 82 + 81 + 80 + 79 + 48 + 47 + 46 + 45 +$
 $+ 44 + 43 + 12 + 11$

(разность $\neq 30$ — числа не должны стоять на одной и той же позиции в промежутках.

Например 1 и 91 — первая позиция
(91-1): 30

35 и 65 — пятая;
(65-35): 30)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

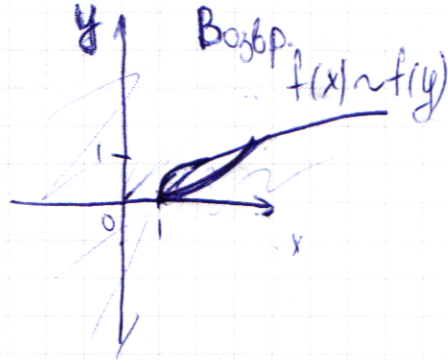
№4

Д: $x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

$|a(x-2)| \leq \sqrt{x-1}$

а х а т а $\rightarrow (2a - ax)$



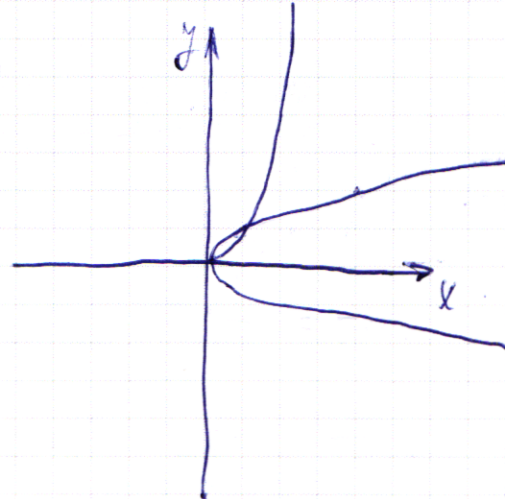
$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$

$y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x}$

$y^2 = x$



$120 + 119 + 118 + 117 + 116 + 115 + 84 + 83 + 82 + 81 + 80 + 79 +$

$+ 78 + 77 + 76 + 75 + 74 + 73 + 72 + 71 + 70 + 69 + 68 + 67 + 66 + 65 + 64 + 63 + 62 + 61 + 60 + 59 + 58 + 57 + 56 + 55 + 54 + 53 + 52 + 51 + 50 + 49 + 48 + 47 + 46 + 45 + 44 + 43 + 42 + 41 + 40 + 39 + 38 + 37 + 36 + 35 + 34 + 33 + 32 + 31 + 30 + 29 + 28 + 27 + 26 + 25 + 24 + 23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11$

$$x \cdot v \cdot t_1 = 1$$

$$\begin{cases} x \cdot v \cdot d_1(t) = 1 \\ (x+2)v \cdot d_2(t+1) = 1 \\ (x+6)v \cdot d_3(t+2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xvd_1t = 1 \\ (xv+2v)(d_2t+d_2) = 1 \\ (xv+6v)(d_3t+2d_3) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{(x+2)v(t+1)}{xvt} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{28}{420} - \frac{15}{420} = \frac{15}{420}$$

$$\frac{(x+6)v(t+2)}{xvt} = \frac{28}{15}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 15 \\ \hline 43 \\ + 140 \\ \hline 183 \\ + 28 \\ \hline 211 \end{array}$$

$$\frac{(x+6)v(t+2)}{(x+2)v(t+1)} = \frac{28}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{5}$$

$$xvt = \frac{1}{28}$$

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{28}$$

$$xvt + xv + 2vt + 2v = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{28}$$

$$xvt + 2xv + 6vt + 12v = \frac{1}{15}$$

$$\frac{4}{84} - \frac{3}{84} = \frac{1}{84}$$

$$2xv + 6vt + 12v = \frac{13}{420}$$

$$\frac{2xv + 6vt + 12v}{xv + 2vt + 2v} = \frac{1}{84} = \frac{5}{420}$$

$$xv + 4vt + 10v = \frac{7}{420} = \frac{1}{60}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-026

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

У-016

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 ① $2x^2 - 5x + 1 = -1$

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$D = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$

$x_1; 0,5$ $x_2; 1,5$

$\sqrt{25 - 10a} = \sqrt{40}$

$10a = -14$

$a = \frac{-14}{4} =$

$a = -1,4$

$= -1,75$

2,4

② $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$D = 25 + 24 = 49$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}$

$-0,5; 3$

⑦

3,5 25

$\begin{array}{r} 3,5 \\ \times 3,5 \\ \hline 17,5 \\ 10,5 \\ \hline 12,25 \end{array}$

$\frac{\sqrt{25 - 10a}}{2} = \sqrt{10}$

1,5

12,25

$\sqrt{49}$

$\sqrt{25 - 10a} = \sqrt{40}$

$\begin{array}{r} 2,25 \\ \times 2,25 \\ \hline 145,0 \end{array}$

100

$\sqrt{40}$

$10a = -15$

$a = -1,5$

$\begin{array}{r} 12,25 \\ \times 2,25 \\ \hline 145,0 \end{array}$

$\begin{array}{r} 12,25 \\ \times 2,25 \\ \hline 10,00 \end{array}$

$\sqrt{10}$

$\sqrt{14,5}$

$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{5+3-5+3}{4} = 1,5$

$\Delta x = \frac{2\sqrt{10}}{2a} = \frac{\sqrt{10}}{a}$

12,25
-2,25

$$2x^2 - 5x + 1 = a$$

$$2x^2 - 5x + (1-a) = 0$$

$$D = 25 - 8(1-a) = 17 + 8a$$

$$\Delta x = \frac{\sqrt{17+8a}}{2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{17+8a} = 2\sqrt{14,5}$$

$$17+8a = 40$$

$$17+8a = 58$$

$$8a = 23$$

$$8a = 41$$

$$\frac{23}{8} a = \frac{23}{8} = 2\frac{7}{8} = \boxed{2,875}$$

$$a = \frac{41}{8} = \boxed{5,125}$$

$$2x^2 - 5x - \boxed{1,875}$$

$$\begin{array}{r} -4,125 \\ + 1,125 \\ \hline \end{array}$$

$$35,000$$

$$25 + 431 = 66$$

$$\frac{\sqrt{40}}{2}$$

$$\frac{12,25}{38}$$

$$25 + 15$$

$$\frac{1,875}{8}$$

$$15,000$$

$$-30$$

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 14} \\ \underline{4} \\ 30 \end{array}$$