МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 4-017

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “7” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “8” ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

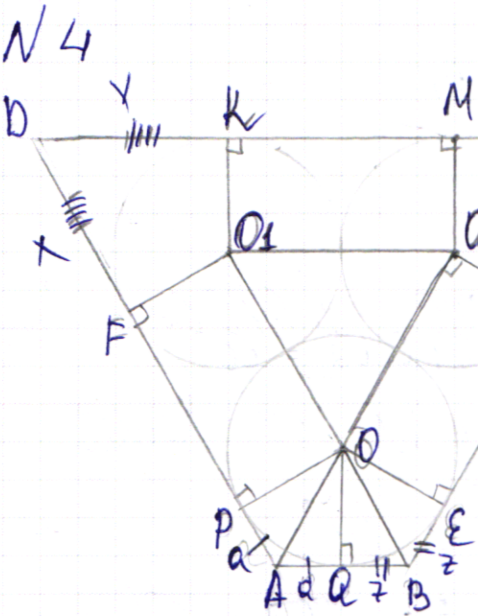
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-027
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4



Решение:
$ABCD$ - четырехугольник; $\omega_1(O_1; r)$; $\omega_2(O_2; r)$; $\omega_3(O; r)$ - вписаны в четырехугольник и касаются попарно друг друга

$\omega_1 \cap AD = F \quad F \in AD$.
$\omega_1 \cap CD = K \quad K \in CD$
$\omega_2 \cap CD = M \quad M \in CD$
$\omega_2 \cap CB = N \quad N \in CB$
$\omega_3 \cap CB = E \quad E \in CB$
$\omega_3 \cap AB = Q \quad Q \in AB$
$\omega_3 \cap AD = P, \quad P \in AD$

$AP = AQ = a$
$BQ = BE = z$
$DK = DF = x$
$CM = CN = y$
} по св-ву касательных, проведенных из одной точки

а) $AD + BC - AB - CD = 12$;
$a + x + PF + z + y + EN - a - z - x - y - KM = 12$;
$PF + EN - KM = 12$

Рассм. FO_1OP - прямоугольник, т.к. $O_1F \parallel OP$ - ($\angle O_1FP = \angle OPF = 90^\circ - x$, $\angle O_1FP + \angle OPF = 180^\circ$, при секущей PF) $O_1F = OP = r$, значит $FP = O_1O$;

Рассм KMO_2O_1 - прямоугольное (док-во аналогично), значит $KM = O_1O_2$;

Рассм. EOO_2N - прямоугольник (док-во аналогично), значит $OO_2 = EN$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

следовательно

$O_1O + O_2O - O_1O_2 = 12;$

$\left.\begin{array}{l} O_1O = 2r \\ O_2O = 2r \\ O_1O_2 = 2r \end{array}\right\}$ т.к. окружности пересекаются и их радиусы равны,

т.е. $O_1O = O_2O = O_1O_2 = 2r.$

$2r + 2r - 2r = 12;$

$r = 6$

б). Т.к. $O_1O = O_2O = O_1O_2$, то ΔO_1OO_2 - равносторонний, значит $\angle O_1OO_2 = 60°.$

$\angle O = 360°;$ $\left.\begin{array}{l} \angle O_1OP = 90° \\ \angle O_2OE = 90° \end{array}\right\}$ по док. ранее

$\angle POE = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°;$

Рассм. $\Delta POA = \Delta QOA$, $\angle OPA = \angle OQA = 90°$ (т.к. радиусы проведены в точки касания), по двум катетам ($OP = OQ = r$ и $AP = AQ = a$), значит $\angle POA = \angle QOA = \alpha$.

Рассм. $\Delta QOB = \Delta EOB$, $\angle Q = \angle E = 90°$ (т.к. радиусы проведены в точку касания), по двум катетам ($OQ = OE = r$ и $BQ = BE = z$), значит $\angle QOB = \angle EOB = \beta$;

$\angle AOB = \alpha + \beta;$ $\angle POE = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta);$

$\alpha + \beta = \frac{120°}{2} = 60°.$ т.е. $\angle AOB = 60°.$

в) $AO \cdot OB = 58$

По теореме косинусов в ΔAOB:

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos\angle AOB;$

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot 58 \cdot \cos 60°.$

$(a + z)^2 = a^2 + 36 + z^2 + 36 - 2 \cdot 58 \cdot \frac{1}{2};$ $2az = 72 - 58;$
$az = 7.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-017
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $AO = \sqrt{a^2+36}$; $BO = \sqrt{z^2+36}$; $az = 7$;

то $\sqrt{a^2+36} \cdot \sqrt{z^2+36} = 58$;

$(a^2+36)(z^2+36) = 3364$;

$36^2 + a^2z^2 + 36a^2 + 36z^2 = 3364$;

$49 + 36(a^2+z^2) + 1296 = 3364$;

$36((a+z)^2 - 2az) + 1345 = 3364$;

$36((a+z)^2 - 14) = 2019$;

$36(a+z)^2 - 504 = 2019$;

$(a+z)^2 = \frac{2525}{36}$;

$a+z = \frac{5\sqrt{101}}{6}$.

$AB = \frac{5\sqrt{101}}{6}$.

Ответ: 6; 60°; $\frac{5\sqrt{101}}{6}$.

N5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$; $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

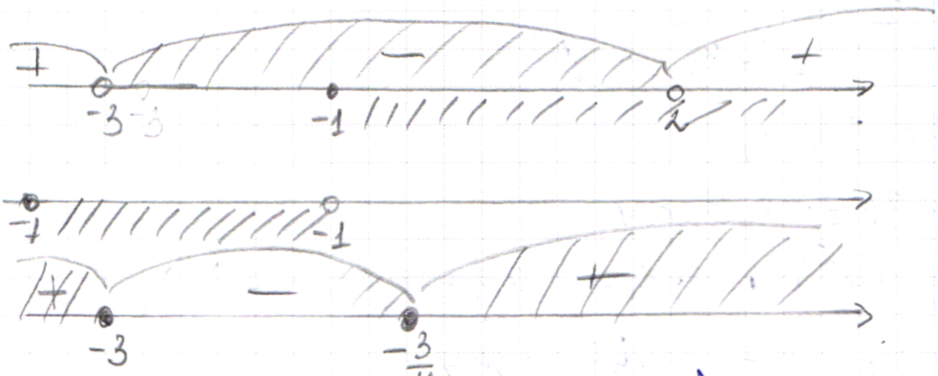
ОДЗ: $\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-4; \\ x+7 \neq x^2+2x+1 \\ \sqrt{x+7} > x \end{cases}$ $\begin{cases} x>-4; \\ x\neq 2,\ x\neq -3 \\ x \in [-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \end{cases}$

$x \in (-4; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$.

1) $\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7} - x \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+7} > 1+x \\ 2x+4 \geq \sqrt{x+7} \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} x+7 > x^2+2x+1 \\ x+1\ge 0\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x+7\ge 0\\ x+1<0\end{array}\right.\end{array}\right. \\ 4x^2+16x+16 \ge x+7\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} x^2+x-6<0; \\ x\ge -1;\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x\ge -7;\\ x<-1;\end{array}\right.\end{array}\right. \\ 4x^2+15x+9 \ge 0;\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} (x+3)(x-2)<0 \\ x\ge -1\end{array}\right. \\ x\in[-7;-1)\end{array}\right. \\ (x+3)(4x+3)\ge 0\end{array}\right.$$



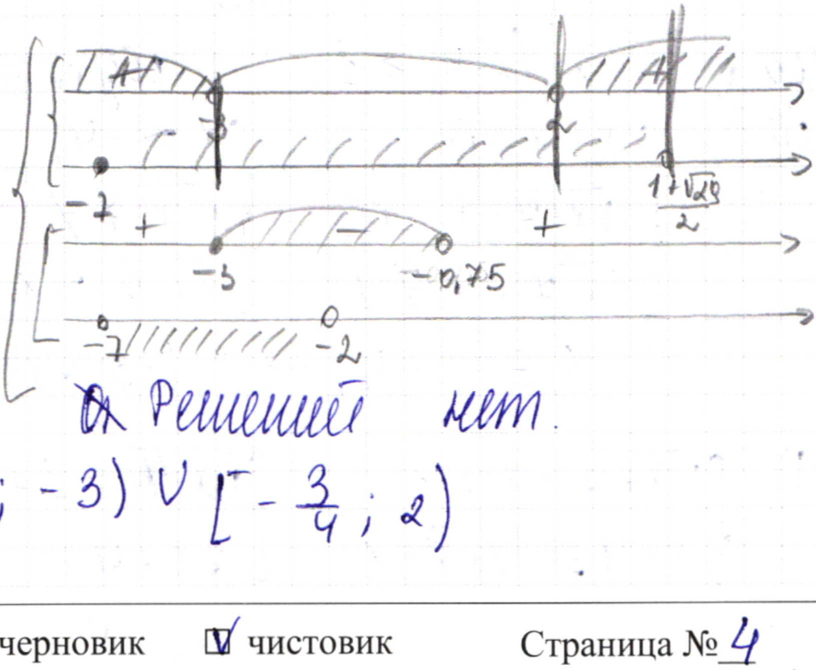
$x\in[-7;-3)\cup[-\frac{3}{4};2)$.

2) $\left\{\begin{array}{l} 0<\sqrt{x+7}-x<1 \\ (4+x)\le\sqrt{x+7}-x\end{array}\right.$

$~~x^2+7~~$

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x+7}<x+1 \\ \sqrt{x+7}-x>0\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} 16x+16+4x^2\le x+7 \\ 2x+4\ge 0\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x+7\ge 0\\ 2x+4<0\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} x+7<x^2+2x+1 \\ \sqrt{x+7}>x\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} (x+3)(4x+3)\le 0 \\ x\ge -2\end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x\ge -7;\\ x<-2\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} (x+3)(x-2)>0 \\ \cancel{x\in}[-7;\ \frac{1+\sqrt{29}}{2})\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} (x+3)(4x+3)\le 0 \\ x\ge -2;\end{array}\right. \\ x\in[-7;-2).\end{array}\right.\end{array}\right.$$



Решений нет.

Ответ: $x\in[-7;-3)\cup[-\frac{3}{4};2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y = 2x^2$, $y = 98$, $y = 18$, $y = a$, $\angle\alpha = 120°$.

$98 = 2x^2$;

$x = \pm 7$; $|x| = 7$;

длина отрезка равна $2|x_1| = 14$, т.к. точки симметричны относительно оси Oy;

$18 = 2x^2$;

$|x_2| = 3$, длина отрезка равна 6

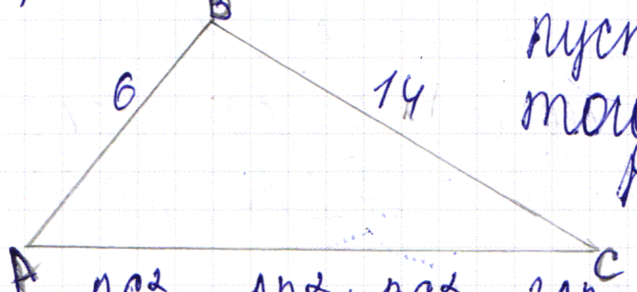
Пусть $AB = 6$, $BC = 14$, $AC = z$; $z > 0$

где $z = 2|x_3|$;

$2x_3^2 = a$;

$|x_3| = \sqrt{\frac{a}{2}}$; $z = \sqrt{\frac{a}{2}}$; $z^2 = \frac{a}{2}$.

1) Рассм. ΔABC,



пусть AC - большая сторона, тогда $\angle ABC = \alpha = 120°$.

По теореме косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC^* \cdot \cos 120°$.

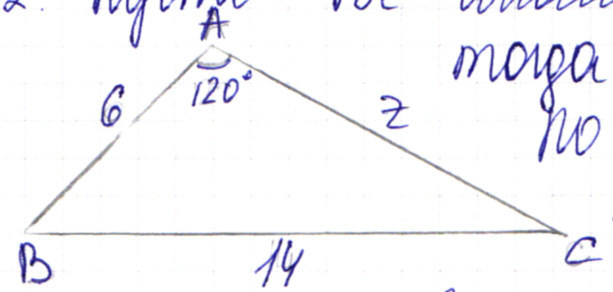
$z^2 = 36 + 196 + 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2}$;

$z^2 = 232 + 84 = 326$

$a = 2z^2$;

$a = 652$;

2. Пусть BC - большая сторона,



тогда $\angle CAB = 120°$

По теореме косинусов

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120°$;

$196 = 36 + z^2 + 6z$;

$z^2 + 6z - 160 = 0$;

$D = 36 + 640 = 676 = 26^2$;

$z_1 = \frac{-6+26}{2} = 10$

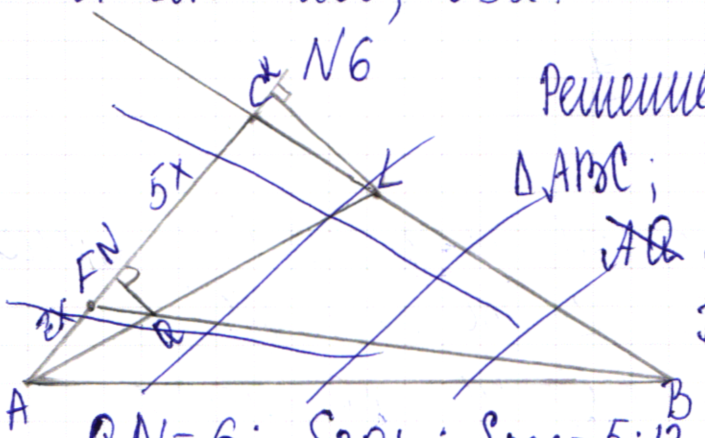
$z_2 = \frac{-6-26}{2} < 0$ - не подходит.

$10 = \sqrt{\frac{a}{2}}$; $100 = \frac{a}{2}$; $a = 200$.

3) Сторона AB - не может быть большей, т.к. $BC > AB$, а значит $\angle ACB$ - не м/б $120°$, т.е. a - не будет существовать.

Ответ: 200; 652.

N6



Решение:

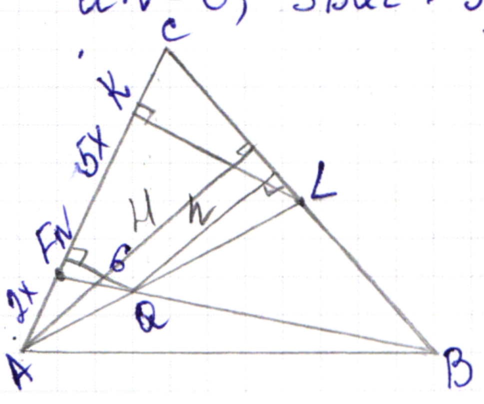
ΔABC; $F \in AC$; $L \in BC$

~~AQ~~ $AL \cap BF = Q$; $AF : FC = 2:5$.

Проведем $QN \perp AC$; $N \in AC$

Проведем $LK \perp AC$; $K \in AC$.

$QN = 6$; $S_{BQL} : S_{BAC} = 5:12$



~~AK~~ $\frac{CF}{AF} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{CB} = 1$;

$\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{AF}{AC} = 1$;

$\frac{LK}{QN} = \frac{AQ}{QL}$; $\frac{LK}{6} = \frac{AQ}{QL}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{CB} = 1;$$

$$\frac{AQ}{QL} = \frac{2BC}{5BL};$$

Пусть H - высота ΔABC; $H \perp CB$

h - высота ΔBQL; $h \perp \cancel{BC} LB$;

$$S_{BQL} = \frac{1}{2} h \cdot BL$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} H \cdot BC;$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{BL \cdot h}{BC \cdot H}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{BL \cdot h}{BC \cdot H};$$

$$\frac{BL}{BC} = \frac{5H}{12h}; \qquad \frac{AQ}{QL} = \frac{2}{5} \cdot \frac{12h}{5H} = \frac{24h}{25H}$$

N2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4;$

$\cancel{\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + (1-\sin^2 x) +}$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{\cos 4x - \cos 10x - 2\sin^2 x + 2\cos^2 5x + 8}{2} =$

$= \frac{\cos 4x - \cos 10x + \cos 2x + \cos 10x + 8}{2} =$

$= \frac{\cos 4x + \cos 2x + 8}{2} = \frac{2\cos^2 2x + \cos 2x + 1 + 8}{2} =$

$= \frac{2\cdot(\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{9}{2})}{2} = \left(\cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{16}\right) +$

$+ \frac{9}{2} - \frac{1}{16} = \left(\cos 2x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{71}{16};$

$-1 \le \cos 2x \le 1$

$-\frac{3}{4} \le \cos 2x + \frac{1}{4} \le \frac{5}{4};$

$0 \le \left(\cos 2x + \frac{1}{4}\right)^2 \le \frac{25}{16};$

$\frac{71}{16} \le (\cos 2x + \frac{1}{4})^2 \le \frac{25+71}{16};$

$\frac{71}{16} \le g(x) \le \frac{96}{16} = 6$

$\frac{71}{16} \le g(x) \le 6.$

$g(x)$ наим. $= \frac{71}{16}.$

$g(x)$ наиб. $= 6.$

Ответ: $\frac{71}{16}; 6.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

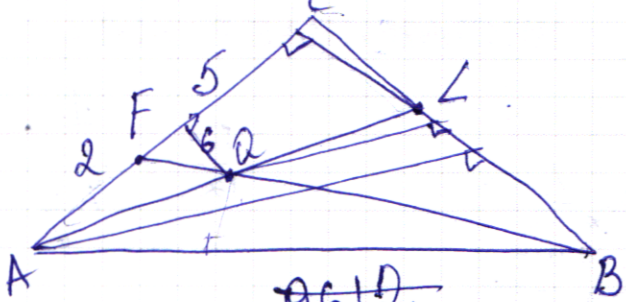
4-017

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10~~

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

3 3 3

1) ~~27 + 26~~



$\frac{9}{2}^{18} - \frac{1}{16} = \frac{72-1}{16} = \frac{71}{16}$

$\times\frac{16}{6}$

$\frac{25}{144} = AC + BC +$

$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

$\frac{AQ}{QL} = A$

$96 | 4$, -8, 24, 16

$2a^2 + a + 9 =$

$\frac{5}{2} \cdot A \cdot \frac{BL}{CB} = 1;$

~~9~~

$= a\sqrt{2}$

$A = \frac{2CB}{5BL}$

$\sqrt{2}a \quad 2 \cdot \sqrt{2}a \cdot x$

$\sin 3x$

$\frac{BQ}{AB} = \frac{h}{H}$

$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{x}{\sqrt{2}}$

~~2cos 2x~~

$\cancel{\frac{AC}{CQ}} = \frac{CQ}{AC} = \frac{h}{H}$

$\frac{2\cos^2 2x + \cos 2x + 9}{2}$

$\frac{BQ}{AB} = \frac{CQ}{AC};$

$= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$BQ \cdot AC = CQ \cdot AB$

$2(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x$

$2 \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{BQ}{7} = \frac{h}{H}$ 7x

$\frac{BQ}{7}$

$\frac{LK}{6} = \frac{24h}{25H};$

$LK = \frac{6 \cdot 24H}{25H}$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

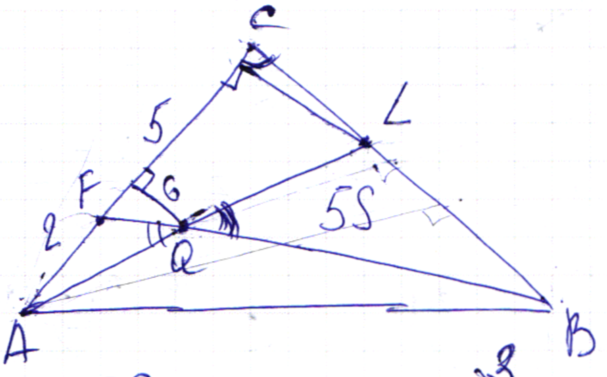
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{5}{12} = \frac{\frac{1}{2}\cdot QK \cdot BL}{\frac{1}{2}\, AM \cdot LC}$;

$5S$

$QK \perp BL,\ K \in CB$

$AM \perp BC$ $\quad \frac{5}{12} = \frac{QK}{AM} \cdot \frac{BL}{LC}$

$S_{ABC} = 12S$

$\cancel{56 \times 56 = 336}$

$26 \times 26 = 156$

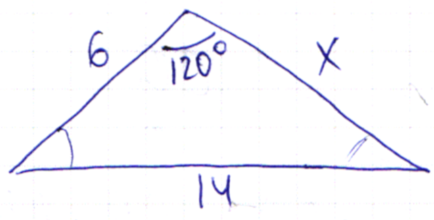
$\cancel{\frac{AF}{FC}}$ $\quad \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$ $\quad \cancel{\frac{CF \cdot BL}{AF \cdot BC}}$

$\cancel{CF}$ $\frac{CL}{BL} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{AF}{\cancel{CF}AC} = 1;$

$160 \times 4 = 640$

$\cancel{\frac{CL \cdot AF}{BL \cdot AC}}$ $\quad \frac{5}{2} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$

$\frac{CL}{BL} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{2}{7} = 1$



$\frac{6}{}$

$\frac{14}{x^2+6x}$

$196 = 36 + x^2 + \cancel{2}\cdot 6\cdot x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}$

$160 = x^2 + 6x;$

$196 + 36 = 232$

$232 + 84 = 326$

$\cancel{36}$ $\quad 226$ $\quad 14 \times 6 = 84$ $\quad 326 \times 2 = 652$

$\underline{\cancel{7 \cdot CB}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4-017

$$\sqrt{(a^2+36)(z^2+36)} = 58;$$

$$a^2z^2+36z^2+36a^2+1296=3364$$

$$49+36(a^2+z^2)=2068;$$

$$36(a^2+z^2)=2019$$

$$12(a^2+z^2)=673$$

$$\frac{49}{z^2}+z^2=\frac{673}{12}$$

$58 \times 58 = 464 + 290 = 3364$

$36 \times 36 = 216 + 108 = 1296$

$2019 : 3 = 673$

$3364 - 1296 = 2068$; $2068 - 49 = 2019$

$2068 + 1296 = 3364$

$36 \times 14 = 144 + 36 = 504$

$58 \times 58 = 464 + 290 = 3364$; $3364 - 1345 = 2019$; $2019 + 504 = 2525$

$36 \times 36 = 216 + 108 = 1296$; $1296 + 49 = 1345$

$101 \times 25 = 505 + 202$

$$\frac{3}{18} = \frac{\sqrt{29}}{a};$$

$$\frac{1}{6} = \sqrt{20}$$

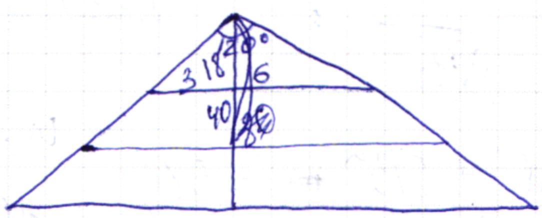
$$\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

~~sinx~~ $\sin 3x + \sin 7x + 1 - \sin^2 x + \cos^2 5x - 1 + 4 =$

$= \sin 3x \sin 7x + \cos 2x + \cos 10x - 4 = 0$

$= \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 10x}{2} + \cos 2x + \cos 10x - 4 =$

$\cancel{\cos^2 x \frac{2\cos^2 2x - 1}{2}}$



$$\frac{3}{18} = \frac{x}{58};$$

$$x = \frac{58 \cdot 3}{18} = \frac{58}{6} = \frac{29}{3}$$

$$\frac{3}{18} = \frac{\sqrt{\frac{a}{2}}}{a}; \quad \frac{1}{6} = \frac{\sqrt{\frac{a}{2}}}{a}; \quad a = 6\sqrt{\frac{a}{2}}; \quad a^2 = \frac{36a}{2};$$

$$a = 18 \qquad a^2 = 18a;$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{2az = 72 - 2\sqrt{a^2z^2+36a^2+36z^2+36^2}\cdot\cos\alpha;}$

$\cancel{az = 36 - \sqrt{\quad}\ \cos\alpha;}$

$\cancel{\frac{360^\circ-180^\circ-60}{2} = \frac{180-\cancel{60}^\circ}{2} = 60^\circ}$

$\cancel{58 - 36 = -\sqrt{\quad}}$

$a + z = 4\sqrt{3}$

$\cancel{\frac{a}{z}} = a = \frac{7}{z}$

$58 | \frac{2}{29}$

$AB^2 = 36 + 36 - 2\cdot 58\cdot\frac{1}{2}$

$AB^2 = 72 - 58$

$AB = \sqrt{14}.$

$\frac{a+z}{12} = \frac{6}{\sqrt{108}} = \frac{6}{6\sqrt{3}}$

$\frac{a+z}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\begin{array}{r} 72 \\ -58 \\ \hline 14 \end{array}$

$AB^2 = a^2 + 36 + z^2 + 36 - 2\cdot AO\cdot OB \cdot \cos 60^\circ$

$a + z = 4\sqrt{3}$

$a^2 + z^2 + 2az =$

$a = \frac{7}{z}$

$2az = 72 - 58;$

$az = 7$

$AO\cdot OB = 58;$

$a + z = \frac{12\cdot 6}{\sqrt{108}} =$

$a + z - ?$

$a^2 = 58;$

$AO = OB;$

$a = \sqrt{58}$

$= \frac{12\cdot 6}{6\sqrt{3}} =$

$36 + z^2 = 36 + \frac{49}{z^2};$

$a\cdot z =$

$= \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

$\cancel{36z^2} + z^4 = \cancel{36z^2} + 49;$

$S = \sqrt{3}$

$4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3} =$

$z^2 = 7;$

$3 = AO^2 + OB^2 - 58;$

$= 16\cdot 3 =$

$z = \sqrt{7};$

$AO^2 + OB^2 = 61;$

$= 48$

$7 + z^2 - 4\sqrt{3}z = 0;$

$D = 48 - 28 = 20;$

$a^2 + z^2 + 2az = 61$

$a =$ $2\sqrt{5}$ $2\sqrt{3} + \sqrt{5}$

$AO^2 = a^2 + 36$

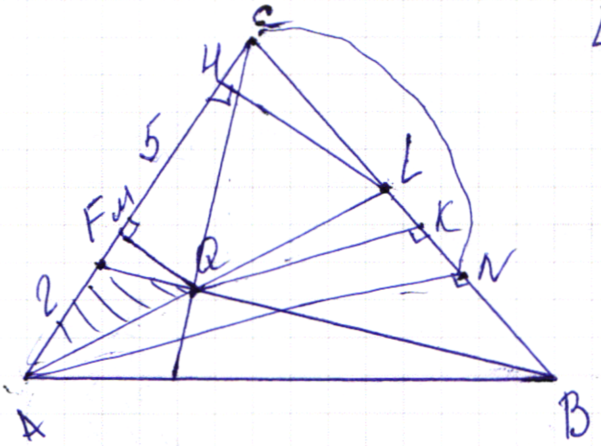
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4-017



$LH - ?$

$QM = 6$

$S_{LQB} = \frac{1}{2} \cdot QK \cdot BL$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot BC$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAA}} = \frac{5}{12}$

$\frac{QK \cdot BL}{AN \cdot BC} = \frac{5}{12}$

$\cancel{S_{AQC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7x}$

$\frac{CF}{AF} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$

$\cancel{S_{ALC} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot 7x}$

$\sin x \cdot \sin x = \frac{1}{2} (\cos(x-y) \mp \cos(x+y)) =$

$S_{AQF} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 6$

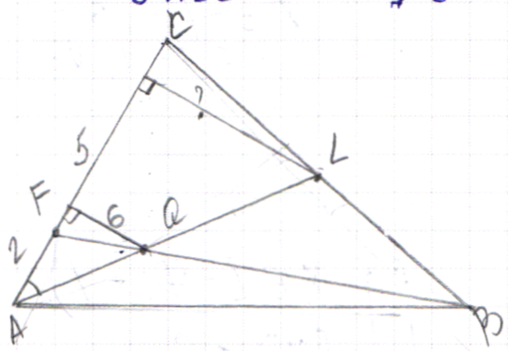
$= \frac{1}{2} (\cancel{\cos x \cos y + \sin x \sin y - - (\cos x \cos y - \sin x}$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot z;$

$\frac{S_{AQF}}{S_{ALC}} = \frac{12}{7z}$

$= \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x$

$+$



$\cos 2x = 2\cos^2 x \cancel{+1} - 1$

$\frac{1}{2} (\cos 4x - 2\cos 10x - 2\sin^2 x + 2\cos^2 5x + 4) = \cos 4x - 2\cos 10x + (-2\sin^2 x + 1) + (2\cos^2 5x - 1) + 4 =$

$= \cos 4x + \cos 2x + \cos 10x - 2\cos 10x + 4 = \cos 4x + \cos 2x - \cos 10x + 4 =$

$= \cancel{\cos 4x} =$

$\cos 4x + \cos 2x = \cancel{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2\cos^{\circ}}$

$\cancel{\cos 4x + 4}$

$\cos 2x - \cos 10x = -2 \sin 6x \sin 4x + 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

ОДЗ: $x+4>0$, $x>-4$, $x>-7$;

$\sqrt{x+7}-x>0$

$\sqrt{x+7}>x$;

$\begin{cases} x<0, \\ x+7>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<0, \\ x>-7; \end{cases}$ $x+7>x^2$; $x^2-x-7>0$

$D = 1+28 = 29$

$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$ (5,4)

$\cancel{\sqrt{x+7}>x}$

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+7}>1+x \\ \sqrt{x+7} \leq 2x+4 \end{cases}$

$\sqrt{x+7}$ $\begin{cases} x+7\geq 0 \\ 1+x<0 \end{cases}$ $\cancel{x+7 \quad 1+x \geq 0}$

$\cancel{175,4}$? $\begin{cases} x\in[-7;-1) \\ \cancel{x\in(-\sqrt{6};-1)} \\ x\in(-1;\sqrt{6}) \end{cases}$

$\sqrt{6}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7\geq 0 \\ 1+x<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7>(1+x)^2 \\ 1+x>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x+7\geq(2x+4)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq -7; \\ x<-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7>1+x+x^2 \\ 1+x>0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x+7\geq 4x^2+16+16x \end{cases}$

$4x^2+16x-x+16-7$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\in[-7;-1) \\ \begin{cases} x^2<6 \\ x>-1 \end{cases} \end{array}\right. \\ 4x^2+15x+9\leq 0 \end{cases}$

$5,5 \times 5,5$: 275, 275, $30,25$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

4-017

$y = 98;$ $\cancel{AO^2 +}$

$x = \pm 7$

при $y = 98$, отрезок $= 14$

при $y = 18$, отрезок $= 6$

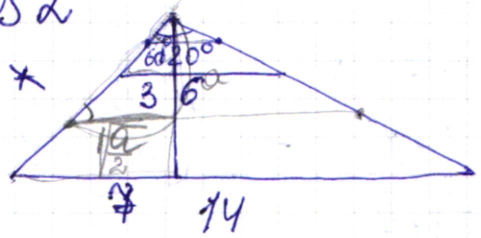
$AO^2 = a^2 + 36$

$BO^2 = z^2 + 36$

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos\alpha$

$a^2 + z^2 + 2az = a^2 + 36 + z^2 + 36 -$

$-2\sqrt{(a^2+36)(z^2+36)} \cdot \cos\alpha$

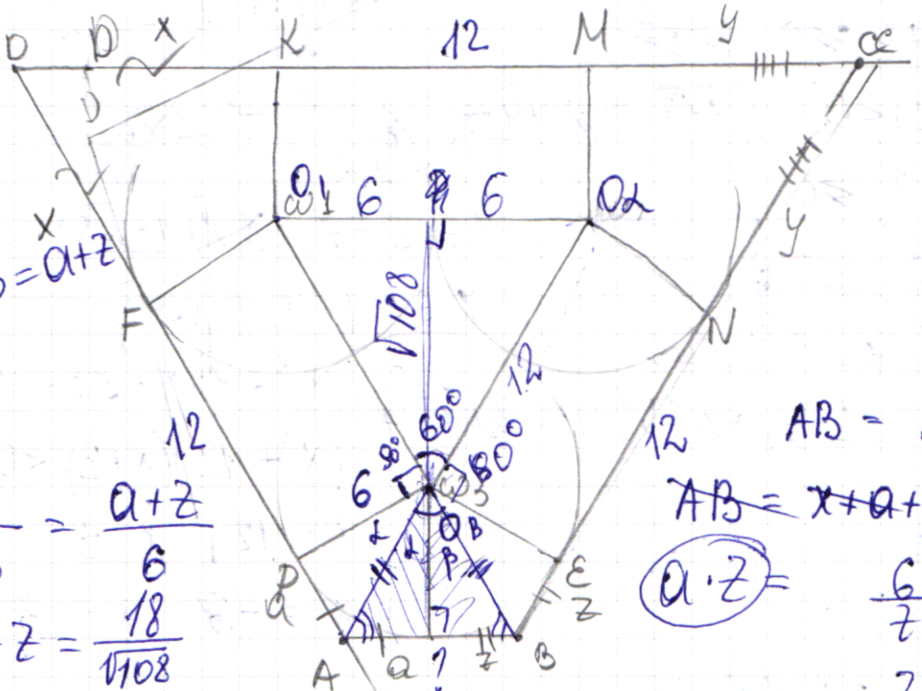


$\sqrt{3}$

$\frac{18\sqrt{108}}{108} = \frac{\sqrt{108}}{6}$

$\frac{7}{3} = \cancel{\frac{98}{18}}$ $\sqrt{58}$

$\frac{\sqrt{58}}{2} =$ $a \cdot z =$



$AO \cdot OB = 58$

$AB = a + z$

$\frac{12}{\sqrt{108}} = \frac{a+z}{6}$

$a + z = \frac{18}{\sqrt{108}}$

$AB = AD + BC - CD - 12$

~~$AB = x + a + 12 + z + y + 12$~~

$a \cdot z =$

$\frac{6}{z} = \frac{\sqrt{108}}{6}$

$z = \frac{36}{\sqrt{108}}$

$AD + BC - AB - CD = 12$

~~$\frac{a+z}{12}$~~

~~$x+y+$~~

$x + a + PF + z + y + EN \cancel{+a} - a - z - x - y - KM = 12$

$PF + EN - KM = 12$ $R = 6$

$2R + \cancel{2R} - \cancel{2R} = 12$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ ОДЗ: $x > -4$, $\cancel{x > -7}$ $x \in [-7; 0\cancel{]})$

$\sqrt{5}-2$, -2, 2

1) $\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$

$\sqrt{x+7} > x;$ x^2

$\cancel{x+7 \geq}$

$\begin{cases} \sqrt{x+7} > 1+x; \\ 2x+4 \geq \sqrt{x+7}; \end{cases}$ $\to$ $\cancel{\neq}$ $1+x \geq 0$, $x \geq -1$, $2 > -2$

$x+7 > x^2;$

$x^2 - x - 7 < 0$ $16+4-7<0$

$x \geq -7$, $x \leq -0$

$\begin{cases} x+7 > 1+x^2+2x \\ 4x^2+16+16x \geq x+7 \end{cases}$

$D = 1 + 28 = 29;$

$x = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \approx 3{,}2$ (5,4)

$\begin{cases} x^2+x-6<0 \\ 4x^2+15x+9 \geq 0 \end{cases}$ $2x+7 \leq \sqrt{x+7}$ $\cancel{x+V}$

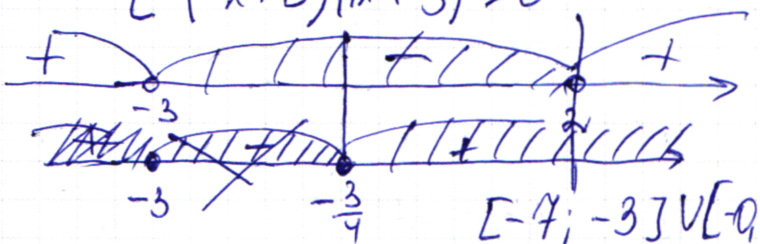
$x = \frac{1-\sqrt{29}}{2} \approx -2.2$

$\begin{cases} (x+3)(x-2)<0 \\ (x+3)(4x+3) \geq 0 \end{cases}$ $\sqrt{x+7} \geq 2x+4$

$-2{,}2$, $3{,}2$

$x \in [-7; \cancel{3{,}2}) \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$x \in (-4; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$



-3, -3, $-\frac{3}{4}$, $\approx -0{,}75$, 2

$[-7; -3] \cup [-0{,}75; 2] \cancel{\sqrt{x^2}} \cancel{4}$

$x^2+15x+36<0$

$(x+12)(x+3)<0;$

$x=-12;$ $x=-3$

$x=-3$ $x=-\frac{3}{4}$

$\cancel{x \in [-3; -\tfrac{3}{4}]}$

2) $\begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1 \\ (2x+4)^2 \leq x+7; \end{cases}$ $x \in [-3; -0{,}75]$

$\sqrt{x+7} \neq 1+x;$

$x+7 \neq 1+x^2+2x;$

$\cancel{x^2}$ $\begin{cases} \sqrt{x+7}-x<1 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \end{cases}$ $\cancel{\sqrt{x+1}}$

$\begin{cases} \sqrt{x+7} < 1+x \\ \sqrt{x+7} > x \end{cases}$

$x^2+x-6 \neq 0;$

$x \neq -3; x \neq 2.$

$\cancel{x^2+}$ $x+7 < x^2+2x+1;$

$x^2+x-6>0$

$\cancel{x \neq}$ $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty).$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)