

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР

4 - 019

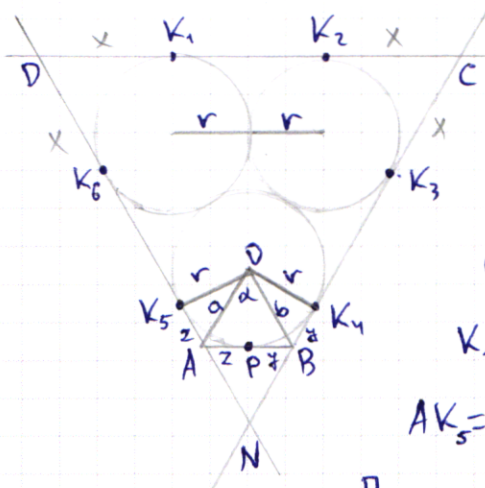
Заполняется ответственным секретарем

- ✓ 1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
- ✓ 2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры "1", "5" и "6" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно десять, и они идут подряд.
- ✓ 3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
- а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.
- б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$ является отрезок длины 1?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.
- ✓ 7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

Решение:



а) Т.к. окружности все равны и попарно касаются, то касательные $DK_1, DK_6, DK_2, CK_3, NK_4, NK_5$ равны и $\triangle DCN$ — равносторонний

Обозначим $DK_1 = x$;

$$K_1K_2 = K_3K_4 = K_5K_6 = 2r$$

$$AK_5 = AP = z; \quad BP = BK_4 = y$$

По условию $AD + BC + AB + CD = 38$

$$AD = x + 2r + z; \quad BC = y + 2r + x; \quad AB = z + y; \quad CD = x + 2r + x$$

$$x + 2r + z + y + 2r + x = 38 + z + y + x + 2r + x$$

$$2r = 38; \quad r = 19$$

б) $AD = a; \quad DB = b$

$$(z+y)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - (z+y)^2}{2ab}$$

$$\cos \alpha = \frac{2r^2 + z^2 + y^2 - z^2 - y^2 - 2zy}{2ab} =$$

$$= \frac{2r^2 - 2zy}{2ab} = 0$$

$$\cos \alpha = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

Ответ: 19, 90°

$\triangle DK_5A$ и $\triangle DK_4B$ — прямоугольные

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = a^2 \\ r^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = a^2 \\ r^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 = 2r^2 + z^2 + y^2$$

Рассм $\triangle ADB$

$$h_a = r; \quad r^2 = zy$$

№1.

$$y = 3x^2 - 4x + 2$$

$$x_0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y_0 = \frac{2}{3}$$

~~$$3x^2 - 4x + 2 = 0$$~~

если $x=0$, то $y=2$

если $y=17$, то $3x^2 - 4x + 2 = 17$

~~$$3x^2 - 4x + 2 = 0$$~~

$$D = 196$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 14}{6}; x_1 = 3; x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x_{1,2} = 3 + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$$

если $y=1$, то $3x^2 - 4x + 2 = 1$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

~~$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot (+1) = 16 + 12 = 28$$~~

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{2}{3}$$

Пусть $\frac{14}{3} = b$; $\frac{2}{3} = c$

1 случай b и c - катеты

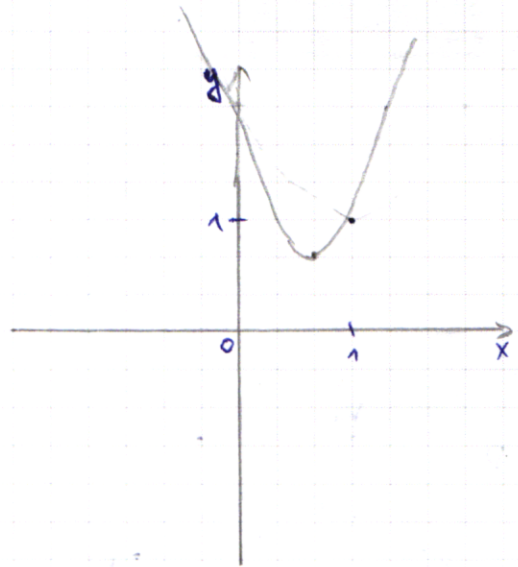
$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$\frac{196}{9} + \frac{4}{9} = a^2$$

$$a = \frac{\sqrt{200}}{3}$$

$$a = \frac{\sqrt{200}}{3} \text{ или } a = \frac{\sqrt{192}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{200}}{3}$; $\frac{\sqrt{192}}{3}$



2 случай c и a - катеты ($b > c$)

$$c^2 + a^2 = b^2$$

$$a^2 = \frac{196}{9} - \frac{4}{9} = \frac{192}{9}$$

$$a = \frac{\sqrt{192}}{3}$$

c - не может
быть
гипотенузой

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

57.

Наибольшее значение может принимать сумма 28-и выбранных
Пинокио чисел, если он будет брать следующие комбинации чисел:

- 1) 200; 199; 198; 197; 196; 195; 194
- 2) 149; 148; 147; ...; 43
- 3) 99; 98; ...; 93
- 4) 49; 48; ...; 43

Найдём значение суммы 28-и чисел:

$$200 \cdot 7 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 150 \cdot 7 - 28 + 100 \cdot 7 - 28 + 50 \cdot 7 - 28 = 7(200 + 150 + 100 + 50) - 3 \cdot 28 - 21 = 7 \cdot 500 - 105 = 3500 - 105 = 3395$$

Ответ: 3395

52.

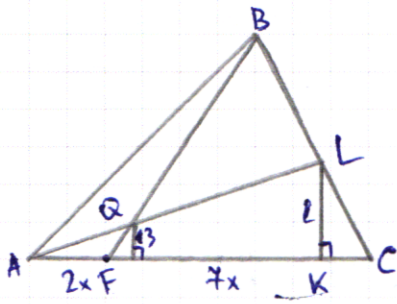
Т.к. цифр "5" ровно десять и они идут подряд, то уже найдётся 11
чисел с идущими подряд цифр "5"

Найдём количество чисел:

$$11(10! - 2) = 11(36288 - 2) = 11 \cdot 36286 = 399146$$

Ответ: 399146

№ 6.



$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{8}{21}$$

$$LK = l$$

$$S_{ABC} = \frac{h \cdot 9x}{2} = 21S$$

$$S_{BFC} = \frac{h \cdot 7x}{2}$$

$$S_{ALC} = 9x$$

$$S_{AQF} = \frac{13 \cdot 2x}{2}$$

$$S_{ALC} = \frac{9x \cdot l}{2}$$

$$S_{ABF} = \frac{h \cdot 2x}{2}$$

$$S_{BQL} = S_{ABC} - S_{ABF} - S_{ALC} + S_{AQF} = \frac{h \cdot 9x}{2} - \frac{h \cdot 2x}{2} - \frac{9x \cdot l}{2} + \frac{13 \cdot 2x}{2} = 8S$$

$$\begin{cases} 21S = \frac{h \cdot 9x}{2} \\ 8S = \frac{h \cdot 9x}{2} - \frac{h \cdot 2x}{2} - \frac{9x \cdot l}{2} + \frac{13 \cdot 2x}{2} \\ 21S - 8S = \frac{h \cdot 2x}{2} + \frac{9x \cdot l}{2} - \frac{13 \cdot 2x}{2} \end{cases}$$

Если $S=1$ то

$$\frac{h \cdot 9 \cdot 3}{2} = 21$$

$$42 = h \cdot 9$$

42

$$\frac{42}{9}$$

$$\begin{cases} 21 = \frac{h \cdot 9x}{2} \\ 8 = \frac{h \cdot 9x}{2} - hx - \frac{9xl}{2} + 13x \\ 13 = hx + \frac{9xl}{2} - 13x \end{cases}$$

$h > 13$, значит $x < 0$

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{9}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$h = 14$$

$$8 = 21 - 14 \cdot \frac{1}{9}$$

$$24 = \frac{h \cdot 9x}{2}$$

$$42 = h \cdot 9$$

$$h = \frac{42}{9}$$

$$8 = 21 - h \cdot \frac{42}{9}$$

$$8 = 42 - \frac{42}{9} - \frac{9 \cdot \frac{1}{9} l}{2} + \frac{13}{9}$$

$$\frac{l}{2} = 42 - \frac{29}{9} - 8$$

$$\frac{l}{2} = 36 - 3 \frac{2}{9} = 33 \frac{7}{9}$$

$$l =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Пусть вся работа равна 1
Количество рабочих равно x

Производительность — y

~~$\frac{1}{x} = 21$~~

~~$\frac{1}{x+2} =$~~

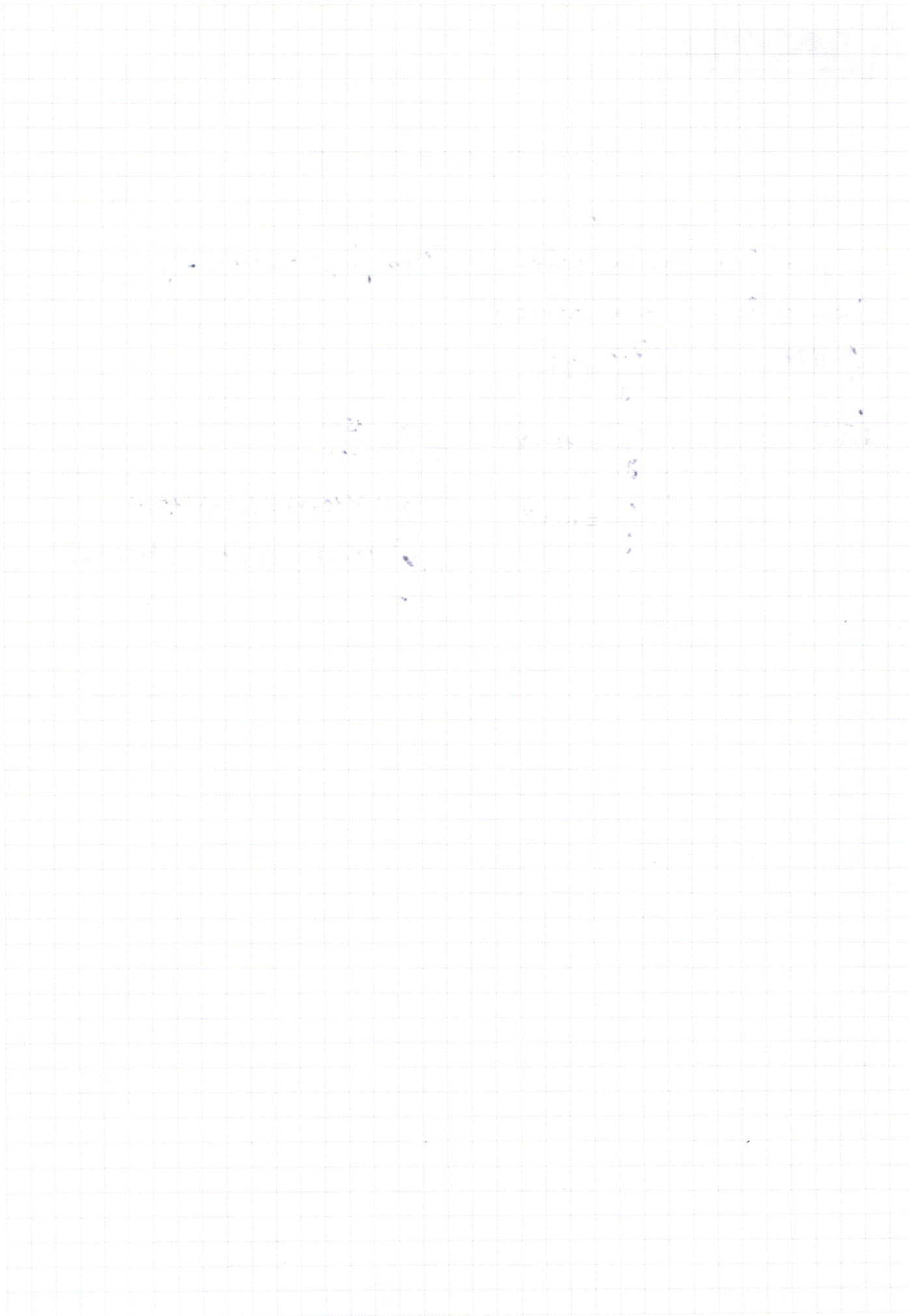
$$\begin{cases} \frac{1 \cdot x}{y} = 21 \\ \frac{x+2}{y} = 15+x \\ \frac{x+4}{y} = 10+x \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x+4} = \frac{15+x}{10+x}$$

$$(x+2)(10+x) = (x+4)(15+x)$$

~~$x^2 + 10x + 20 + 2x = 15x + x^2 + 60 + 4x$~~

$$7x =$$

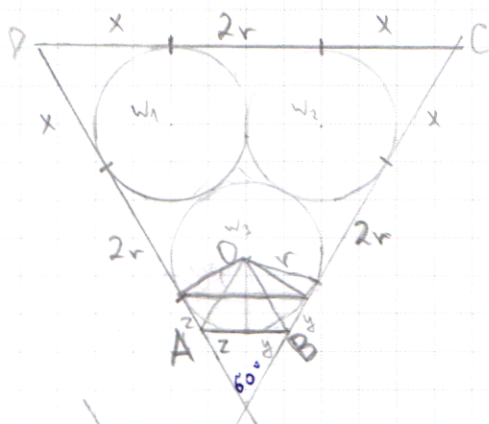


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

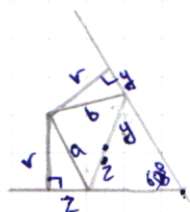
$$AD + BC - AB - CD = 38$$



$$z + 2r + x + y + 2r + x + l = 38 + z + y + 2x + 2r$$

$$2r = 38$$

$$r = 19$$



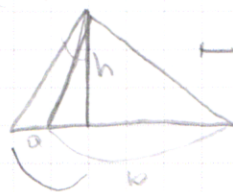
$$\begin{aligned} 90 + 120 + 60 + 120 \\ 90 + 90 + 120 + 60 \\ 180 + 120 \\ 60 \end{aligned}$$



$$\frac{ah}{2} = \frac{bh}{2}$$

$$\frac{(a+b)h}{2}$$

$$a+b = \text{const}$$



$$h^2 = z \cdot y$$

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = a^2 \\ r^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

$$a^2 - z^2 = b^2 - y^2$$

$$z^2 - y^2 = a^2 - b^2$$

$$(a-z)(a+z) = (b-y)(b+y)$$

$$(z-y)(z+y) = a^2 - b^2$$

$$(z+y) = \frac{a^2 - b^2}{z-y}$$

$$(z+y)^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(z-y)^2}$$

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{(z-y)^2} = a^2 + b^2 - 2ab \cos d$$

$$\frac{(a+b)(a-b)^2}{(z-y)^2} = a^2 + b^2 - 2ab \cos d$$

$$(z+y)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot ab \cos d$$

$$z+y = \text{const}$$

$$2 \cdot ab \cos d = a^2 + b^2 - (z+y)^2$$

$$\cos d = \frac{a^2 + b^2 - (z+y)^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - (z^2 + y^2 + 2zy)}{2ab} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - z^2 - y^2 - 2r^2}{2ab}$$

$$a^2 + b^2 = z^2 + y^2 + 2r^2$$

$$\cos d = \frac{z^2 + y^2 + 2r^2 + z^2 - y^2 - 2r^2}{2ab} = \frac{0}{2ab}$$

$$90^\circ \quad 270^\circ$$

Ответ: 90°

55.

x - число

$$\frac{x}{8} = 21$$

$$\frac{x+9}{y+2} + x = 15$$

$$\frac{1}{15} = z$$

$$1 \cdot 3 = 62z$$

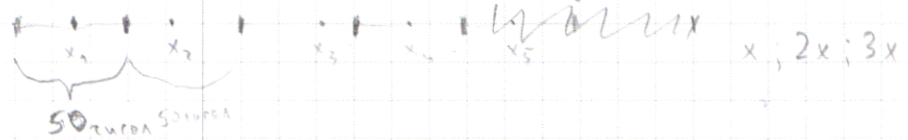
1 год. 3г. 2г.

$$x \cdot \frac{1}{15}$$

x x₁ x₂ x₃ x₄ x₅ x₆ x₇

наиб. зн. мож. принимать сумма 28 выбр. чисел если
Питеркин будет брать числа

возьмем максимальные числа из промежутков; 50 = x



$$x_2 - x_1 = 50$$

$$50 \quad 100 + 49 \quad 200 - 149$$

1) 200, 199, 198, 197, 198, 195, 196 $2x+1 \quad 2x$

3) 199, 18, 149, 148, ..., 145, 144, 143

4) 99, 98, =, 95, 93

5) 49, 48, $2x$ = 45

$$200 \cdot 7 - \underline{1} - \underline{2} - \underline{3} - \underline{4} - \underline{5} - \underline{6} = 200 \cdot 7 - 21$$

$$150 \cdot 7 - \underline{1} - \underline{2} - \underline{3} - \underline{4} - \underline{5} - \underline{6} - \underline{7} = 150 \cdot 7 - 28$$

$$100 \cdot 7 - 28$$

$$50 \cdot 7 - 28$$

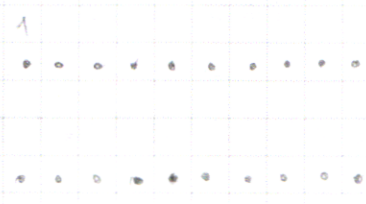
$$3 \cdot 28$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 28 \\ \times 3 \\ \hline 84 \\ + 21 \\ \hline 105 \end{array}$$

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11
- 12
- 13
- 14
- 15
- 16
- 17
- 18
- 19
- 20



$7 \cdot 10 + 10$



1
 1212
 1221

$$\begin{array}{r} \times 36286 \\ 11 \\ \hline 36286 \\ 36286 \\ \hline 399146 \end{array}$$

$1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$
 $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$
 $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$

$\times 10! + 10!$

$325 = 8hx + 13x$

$425 = 9hx$

$165 = hx + \frac{9xLK}{2} - 13x$

$215 = \frac{h \cdot 9x}{2}$

$165 = 7xh - \frac{9xLK}{2} + 13 \cdot 2x$

$6xh - 9xLK + 2639x = 0$

$11 + 10! + 10! + 9! + 10 + 8! + 80 + 7!$

$\times yz$

$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S_{\Delta BFC} = h \cdot 9x \cdot 7x$

$27 \cdot 32 \cdot 42 \cdot 100 = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

$27 \cdot 32 = 864$

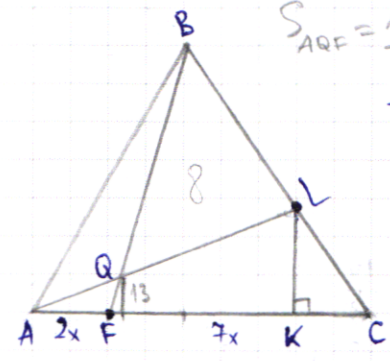
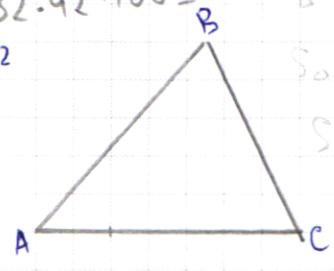
$S_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$
 $S_{\Delta} = pr$
 $S_{\Delta} = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{h \cdot 9x}{2}$

$S_{\Delta AQC} = \frac{13 \cdot 2x}{2}$

$\frac{S_{\Delta BQL}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{8}{21}$

$h = \frac{8}{3} \cdot 9x$
 $h^2 = 4x^2 \cdot 64$
 $h^2 =$



$S_{\Delta ALC} = \frac{9x \cdot LK}{2}$

$\frac{9x \cdot LK}{2} - \frac{13 \cdot 2x}{2}$

$(2x)^2 + 13^2 = AQ^2$

$(9x)^2 + LK^2 = AL^2$

$\frac{h \cdot 7x}{2} = \frac{21}{8}$

$3215 - 85 = \frac{h \cdot 2x}{2} + \frac{9x \cdot LK}{2} - \frac{13 \cdot 2x}{2}$

$165 = hx + \frac{9xLK}{2} - 13x$

$215 = \frac{h \cdot 9x}{2}$

$165 = 7xh - 9xLK + 13 \cdot \frac{2x \cdot h}{2} + \frac{h \cdot 7x}{2} = 215$

$85 = \frac{h \cdot 7x}{2} - \frac{9x \cdot LK}{2} + \frac{13 \cdot 2x}{2}$

$\begin{cases} 425 = h \cdot 9x \\ 165 = h \cdot 7x - 9x \cdot LK + 13 \cdot 2x \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. \quad y = 3x^2 - 4x + 2 \quad 3 - 4 + 2 = 1$$

$$y = 17$$

$$y = 1$$

$$y = a$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y_0 = 3 \cdot \frac{4}{9} - \frac{4 \cdot 2}{3} + 2 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_0 = 3x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 0$$

$$3x^2 - 4x + 2 = 17$$

$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 16 + 180 = 196$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 14}{6}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x_0 = \frac{2}{3}$$

$$x_{1,2} = 3 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{9}{3} + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$$

1 случай: $d = \frac{2}{3}$

$$d^2 + b^2 = c^2$$

$$b = \frac{14}{3}$$

$$\frac{4}{9} + \frac{196}{9} = c^2$$

$$c^2 = \frac{200}{9}$$

$$a = \frac{\sqrt{200}}{3}; \quad a = \frac{\sqrt{200}}{3}$$

2 случай: $a^2 + d^2 = b^2$

$$a^2 = b^2 - d^2$$

$$a^2 = \frac{196}{9} - \frac{4}{9} = \frac{192}{9} \quad a = \frac{\sqrt{192}}{3}$$

