

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

4-020

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$165 = x^2; \quad x_1 = 13; \quad x_2 = -13$$

$$64 = x^2; \quad x_1 = 8; \quad x_2 = -8$$

x_1, x_2 - положительные стороны равны 26

x_1', x_2' - положительные стороны равны 16

Поскольку малый угол треугольника с углом в 120° то остальные углы треугольника будут меньше. И построив большой угол летим большой стороны по формуле 2 уравнение:

$$1) 26^2 = 16^2 + t^2 - 2 \cdot 16 \cdot t \cdot \cos 120^\circ$$

$$2) t^2 = 26^2 + 16^2 - 26 \cdot 16 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ$$

Решим первое уравнение:

$$1) 26^2 = 16^2 + t^2 + 16t$$

$$t^2 - 16t - 420 = 0; \quad (26-16)(26+16) = 0;$$

$$t^2 - 16t - 420 = 0;$$

$$D = 256 + 1680 = 1936;$$

$$t_1 = \frac{16 + 46}{2} = 15$$

$t_2 = \frac{-16 - 46}{2}$ - не является корнем верь искомой стороны треугольника.

$$\alpha_1 = \frac{t}{2}; \quad \alpha_1 = \frac{15}{2} = 4,5$$

$$2) t^2 = 2128; \quad t = \pm \sqrt{2128}; \quad \text{отрицательные корни не подходят}$$

поэтому $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2128}}{2} = \sqrt{532}$ Ответ: 4,5; $\sqrt{532}$

Задача 5

$$\log_{\sqrt{x+3}} - x(x+5) \geq 1$$

ОДЗ

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{x+3} - x > 0 & \quad 2) \sqrt{x+3} - x \neq 1 & \quad 3) x > -5 \\ \sqrt{x+3} > x & \quad \sqrt{x+3} \neq x+1 & \quad 4) x \geq -3 \\ & \quad \quad \quad x \neq 1 \end{aligned}$$

Если $\sqrt{x+3} - x < 1$

$$\sqrt{x+3} - x \geq x+5$$

$$x+5 > 0$$

$\sqrt{x+3} \geq 2x+5$; возведем в квадрат обе части
больше нуля

$$x+3 \geq 4x^2+25+20x$$

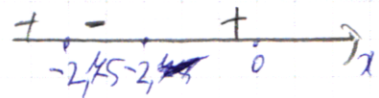
$$0 \geq 4x^2+22+19x$$

$$D = 19^2 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 361 - 352 = 9$$

$$x_1 = \frac{-19+3}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{8} = -\frac{22}{8} = -2,75$$

$$x \in [-2,75; -2]$$



Если $\sqrt{x+3} - x > 1$ то $x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$, возведем в квадрат обе части
не отрицательны.

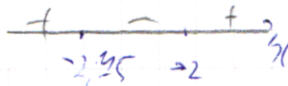
$$4x^2+25+20x \geq x+3$$

$$4x^2+19x+22 \geq 0$$

$$D = 9$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -2,75$$



$\sqrt{x+3} > x$ из этого условия мы получим что $x \geq -5$

и поскольку $\sqrt{x+3} > x$ то x может быть только

положительными числами с положительной частью нулеи или

$x < 1$. то получим что $x \in [-2; 1) \cup [1; 2]$ Ответ: $[-2; 1) \cup [1; 2]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

Поскольку 8 шмвал „5“ даются одни 6 раз
поэтому, то записали все 6 шмвалов „5“ один
крать этот шмвал будет t . Получим что
мало содержит 13 шмвалов один из которых t .
Поскольку шмвалы „0“, „5“ и „9“ даются внутре-
шмвалы в числе которых один раз, а t есть 6 „5“
то мы получим что количество таких чисел
равно числу $S_1 + S_2$.

$$S_1 = \frac{13!}{(13-3)!} = 11 \cdot 12 \cdot 13 \quad \alpha \quad S_2 = \frac{13!}{(13-4)!} = 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$$

$$S_1 + S_2 = 11 \cdot 12 \cdot 13 + 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = (10+1) \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 121 \cdot 156 = 18876$$

Ответ: 18876

Задача 42

$$f(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3$$

Пер записали „sin“ пере x и тогда заметные
свойства которые будут друг за другом.
Из того делаем вывод что $\sin 5x \cdot \sin 9x$ будет
приближено к значению $\sin^2 4x$, из того делаем
вывод что когда $\sin 5x \cdot \sin 9x$ положительное то
оно почти компенсирует $\sin^2 4x$. Значит $f(x)$ будет
приближено к минимуме когда $\sin 5x \cdot \sin 9x < 0$,
и $\cos x \neq 0$, из того делаем вывод что, при

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, мы будем получать минимумы функции, $f(x)_{\min} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3 =$
 $= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 3 = -4,5$

А вот максимумы $f(x)$ будем получать когда все слагаемые будут равны нулю, значит $\cos x = 1$ или $\cos x = -1$, следовательно $\cos^2 x = 1$
значит $f(x) = 0 - 0 - 1 - 3 = -4$. Получили что
~~то~~ наименьшее значение $-4,5$, а наибольшее -4 . Ответ: $-4,5$; -4

~~1 11~~~~2 24 6 8 10~~

1 3 5 7 9

~~3 6 39 42 45~~

36 42 48

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\alpha = 75$ $\cos 126^\circ = -\frac{1}{2}$
 $x = 13 \pm 13$ $x = \pm 8$ $0, 5, 9$
 $x^2 - 26x + 16 = 0$
 $x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{520}}{2}$
 $\alpha^2 = 26^2 + 16^2 + 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \cos 126^\circ$
 $\alpha^2 = 126^2 - 16 \cdot 26$
 $\alpha^2 = 42^2 - 576$
 $\alpha = \sqrt{1238}$
 $\alpha = \sqrt{1238}$
 $\alpha = 10$
 $26 + 16 + 26 \cdot 16$
 $26(26 + 16)$

$$\log \sqrt{x+3} - x(x+5) \geq 1$$

$$\sqrt{x+3} - x > 0$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$\sqrt{x+3} - x = 1$$

$$\sqrt{x+3} = x+1$$

$$x+3 \geq 0$$

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ = x \geq -3$$

$$90^\circ \quad x+5 > 0$$

$$\sin 90^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} - x \geq x+5$$

$$\frac{1}{2} \sin 22.5^\circ \sqrt{x+3} \geq 2x+5 > 0$$

$$x+3 \geq 4x^2+25+20x$$

$$\frac{1}{2} \sin 41^\circ (\cos 81^\circ) \geq 4x^2+22+19x=0 \quad 5+x$$

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$\frac{1}{2} (\cos 81^\circ - \sin 11^\circ) = 2$$

$$x_3 - x_4 = 3$$

$$\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} - 1 \frac{-19 \pm \sqrt{57}}{8}$$

$$1. \quad 24 + 23 + 22 + 21 + 20 + 19$$

$$2. \quad 24 + 1$$

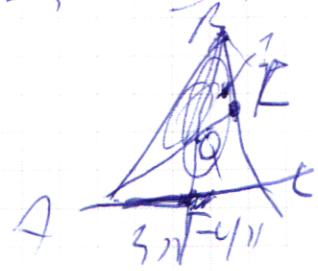
$$3. \quad +25$$

$$4. \quad \frac{12}{2}$$

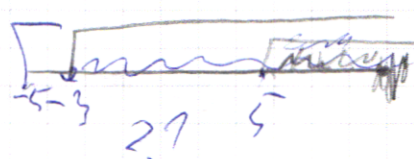
$$7. \quad 1 - 39, 2$$

$$11. \quad 1, 2, 3, 4$$

$$14. \quad 36, 32$$



$$\sqrt{4+32-11} + \frac{16}{22}$$



$$\sqrt{x+3} - x \leq x+5$$

$$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$$

$$7+5 > 8+3 \leq 4x^2+25+20x$$

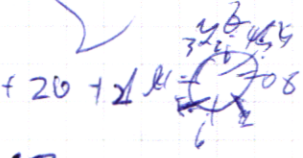
$$4x^2+22+19x \geq 0$$

$$4x^2+22+19x \geq 0$$

$$D = 161 - 16 \cdot 19 \leq 0 \text{ мм.}$$

$$18 - 16 \cdot 19 = 19.3$$

$$\sqrt{57}$$



$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$30 \quad 37 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad x=21$$

$$36 \quad 37 \quad 38 \quad 39 \quad 36 \quad 37 \quad 38 \quad 39 \quad 40$$

$$16 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 16 \quad 8 \quad 5 \quad 10 \quad 11$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3$$

~~$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x$$~~

$$\begin{array}{r} 42 \\ + 156 \\ \hline 121 \\ + 156 \\ \hline 312 \\ + 156 \\ \hline 1876 \end{array}$$

12+



-9,5

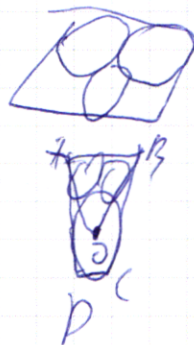
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{2}{4} = A$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 73 \\ \hline 144 \\ + 12 \\ \hline 156 \end{array}$$



$C=1!$

$$A = \frac{x! \cdot n!}{n!}$$



$$A \cdot n - B \cdot C - A \cdot n - C \cdot b = 0$$

$$100D = 4 \cdot 121$$

$$A \cdot B = 2$$

C, m, t

$$\frac{12!}{3!} =$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 - 1 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$$
~~$$25 \cdot 60 \cdot 47 \cdot 12 \cdot 72$$~~

~~$$240$$~~

$$\frac{12!}{(12-4)!}$$

$$30 \cdot 35 \cdot 90 \cdot 96 \cdot 11$$

$$\frac{12!}{(12-4)!} + \frac{12!}{(12-3)!}$$

$$2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$$

$$2 \cdot 20 \cdot 35 \cdot 1056$$

~~$$2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 92$$~~

$$9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 10 \cdot 11 \cdot 12$$

~~$$9999$$~~

$$12$$

$$1320$$

~~$$899,999,999,999$$~~

$$10 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$$

$$10000 \cdot 13200$$

~~$$8999999999999999$$~~

35/5
4/4
~~1/1~~
~~2/2~~
~~3/3~~
~~4/4~~
~~5/5~~

$$\sin^2(6x+\pi) (\sin 6x \cos x + \sin x \cos 6x)^2$$

1) ~~11~~, 142, 143, 144, 145, 146

2) 121, 122, 123, 124, 125

3) ~~81~~, 82, 83, 84, 85

4) ~~41~~, 42, 43, 44, 45, 46

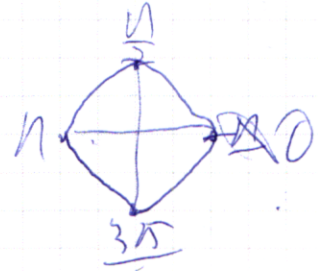
5) 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x$$

35, 126, 169, 140, ~~145~~

$$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3$$

$$5x \cos 5x - 9x \cos 9x - 2 \sin 4x \cdot \cos 4x$$



$$\sin 5x \cdot \sin 9x - 1 + \cos^2 4x - \cos^2 x - 3 = -4$$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x + \cos^2 4x - \cos^2 x - 4$$

35 34 33 32 31

69

CD

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

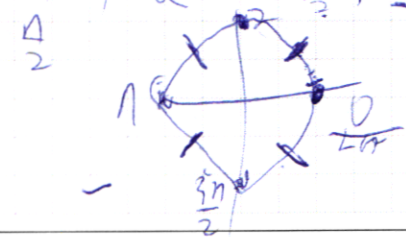


$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x$$

$$-\frac{1}{2} - 2R = -10$$

$$\left[-3, -4, 5\right]$$

5, 140, 145



$$-3 - \frac{1}{2} \cdot 5 = -4,5$$