МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР 7-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.

3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе кторого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 4?

5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры “2”, “5” и “7” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “7” ровно восемь, и они идут подряд.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $4 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.

7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $y=3x^2$ найдем длины отрезков

$y=147$

$y=75$

$y=a$

1) $3x^2=147$

$x^2=49$

$x=\pm 7$ => длина отрезка $=14$

2) $3x^2=75$

$x^2=25$

$x=\pm 5$ => длина отрезка $=10$

3) $3x^2=a$

$x^2=\frac{a}{3}$

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ => длина отрезка $=2\sqrt{\frac{a}{3}}$

Есть 2 случая, когда из этих 3-х отрезков можно составить прямоугольный треугольник.

а) $14^2=10^2+\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2$

$196=100+\frac{4}{3}a$

$\frac{4}{3}a=96$

$a=72$

б) $\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2=14^2+10^2$

$\frac{4}{3}a=296$

$a=111$

Ответ: при $a=72$; $a=111$;

№2)

Дано:

$AD+BC-AB-CD=30$

$V_1=V_2=V_3=V$

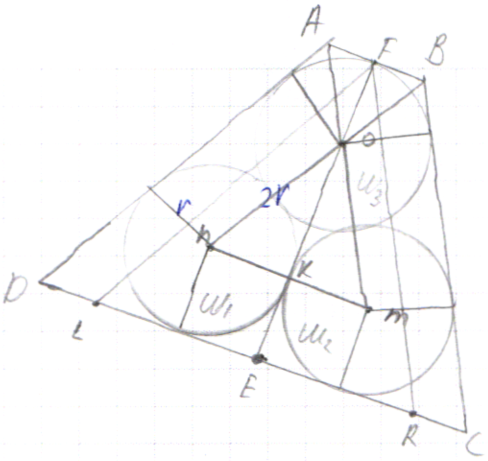
$V-?$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)



по известной теореме, $AD=BC$

$nk = km = OF = r$, т.к явл. радиусами.

$On = nm = Om = 2r$, т.к соединяют центры касающихся окружностей

OK в $\triangle Onm$ – биссектриса $\Rightarrow \angle nOK = 30^\circ$

$OK = 2r\cos 30^\circ = On\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2r = \sqrt{3}r$

параллельным переносом перенесем AD (A совпадает с F). проделаем то же с BC.

рассм. $\triangle LFE$ $\quad FE = OK + 2r$

$$\left.\begin{array}{l} nO \parallel AD \Rightarrow FL \parallel On \\ OK \text{ лежит на } FE \\ nK \parallel DC \Rightarrow nK \parallel LE \end{array}\right\} \triangle LFE \text{ подобен } \triangle nOK. \Rightarrow \frac{FE}{OK} = \frac{FL}{On} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2+\sqrt{3})r}{\sqrt{3}r} = \frac{FL}{2r} \Rightarrow FL = AD = BC = \frac{4\sqrt{3}+6}{3}r;\quad LE = nK\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3}r$$

$FB = CR \quad LR = \frac{4\sqrt{3}+6}{3}r \quad DC = LR + AB$

$$\text{рассм. } \triangle ABO \quad \left.\begin{array}{l} \angle ABO = \angle Onm \text{ (накр. леж)} \\ \angle AOB = \angle nOm \text{ (верт)} \\ \angle BAO = \angle Omn \text{ (накр. леж.)} \end{array}\right\} \triangle ABO \text{ подобен } \triangle Onm$$

$\frac{OF}{OK} = \frac{AB}{nm} \quad AB = \frac{2}{\sqrt{3}}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$

$DC = \frac{6\sqrt{3}+6}{3}r = (2\sqrt{3}+2)r \qquad AD + BC - AB - CD = 2\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}+6}{3}r\right) -$

$- \frac{2\sqrt{3}}{3}r - \frac{6\sqrt{3}+6}{3}r = \frac{8\sqrt{3}-8\sqrt{3}+12-6}{3}r = 2r = 30 \Rightarrow r = 15$

Ответ: $r = 15$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-094

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3 $x+21y=700 \Rightarrow x=700-21y$; y-число страниц, x- число марок;

$$\begin{cases} \frac{x}{22} > y \\ \frac{x}{26} \le y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{700-21y}{22} > y \\ \frac{700-21y}{26} \le y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 700-21y > 22y \\ 700-21y \le 26y-26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 43y < 700 \\ 47y \ge 726 \end{cases}$$

$$\frac{726}{47} \le y < \frac{700}{43}$$

$15\frac{21}{47} \le y < 16\frac{12}{43}$, число страниц натуральное $\Rightarrow y=16$

$x=700-21y=700-336=364$

Ответ: 364 марки сейчас у него.

N 5.

Дано:

„7"-8

19-ти знач.

„2", „5", „7".

Решение:

представим, что нам нужно составить 19-значное число из карточек, на кот. написано „2", „5", или „7". Причем все карточек „7" только 8, и они должны стоять подряд. Тогда представим, что все 8 карточек „7"- одна карточка. У нас осталось 12 карточек „R", несколько „2", несколько „5" и „77777777"

$A_3^{12} = 3^{12}$ Ответ: 3^{12};

№7. В каждом промежутке число можно записать как $[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \ldots V_{25}]$, где V_1 дает остаток 1 при делении на 25. V_2 - 2, V_3 - 3, и так далее соответственно. Если в среди выбранных двух чисел нет таких двух, разность которых делится на 25, значит в выборке нет чисел с одинаковым остатком. Минимальное значение сумма этих 20 чисел принимает, если брать числа

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) с минимальными остатками (от 1 до 20). Значение можно найти так:

$1+2+3+4+5+31+32+33+34+35+61+62+63+64+65+91+92+93+94+95 = 5\cdot25\cdot0+5\cdot25\cdot1+$
$+5\cdot25\cdot2+5\cdot25\cdot3+1+2+3+4\ldots+20 = 960.$

Ответ: 960;

№ 4.

$|ax-3a| \leq \sqrt{x-1}$; $x \geq 1$

$|ax-3a|$ может принимать значения от $-\sqrt{x-1}$ до $+\sqrt{x-1}$ если длина отрезка равна 4, то $2\sqrt{x-1}=4 \Rightarrow$

$\sqrt{x-1}=2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5.$

$|5a-3a| \leq \sqrt{5+1}$

$|2a| \leq 2$ (модуль не может ~~быть~~ иметь значение ~~до~~, меньше 0)

$-2 \leq 2a \leq 2$

$-1 \leq a \leq 1$

Ответ: при $-1 \leq a \leq 1$;

№ 6.

$\frac{AF}{FC}=\frac{3}{5}$

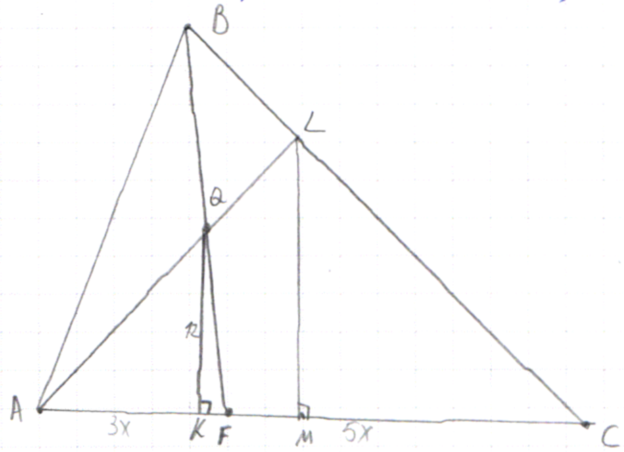
$AF=3x$

$FC=5x$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}}=\frac{4}{25}$

$QK=12$

LM - ?



$AM=MC$

$AC=AF+FC=AM+MC=8x \Rightarrow AM=4x$

$\angle AKQ=\angle AML=90^\circ$ (т.к. это перпендикуляры к AC)

$\angle AQK=\angle ALM$ (т.к. AL пересекает параллельные QK и LM)

$\angle QAK$ общий. $\triangle AQK$ подобен $\triangle ALM \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{QK}{LM}=\frac{AK}{AM}=\frac{3}{4} \Rightarrow LM=\frac{4}{3}QK=16.$

Ответ: 16;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y=3x^2$

$y=147$

$y=75$

$y=a$

① $3x^2=147$

$x^2=49$

$x=\pm 7$ длина отр = 14

② $3x^2=75$

$x^2=25$

$x=\pm 5$ длина отр = 10

③ $3x^2=a$

$x^2=\frac{a}{3}$

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ длина отр $= 2\sqrt{\frac{a}{3}}$

$14 \cdot 14 = 196$

а) $14^2=10^2+\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2$

$196=100+4\frac{a}{3}$

$96=\frac{4}{3}a$

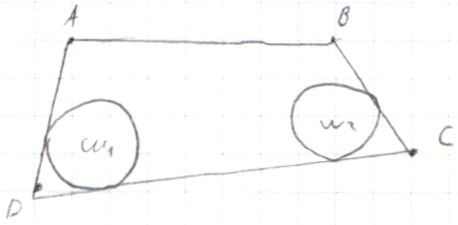
$a=24\cdot 3=72$

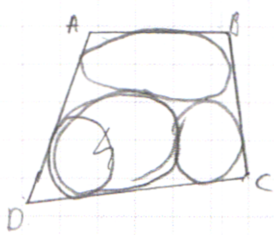
б) $\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2=14^2+10^2$

$\frac{4}{3}a=296$

$\frac{148}{2}=\frac{74}{2}=37$

$a=37\cdot 3=111$



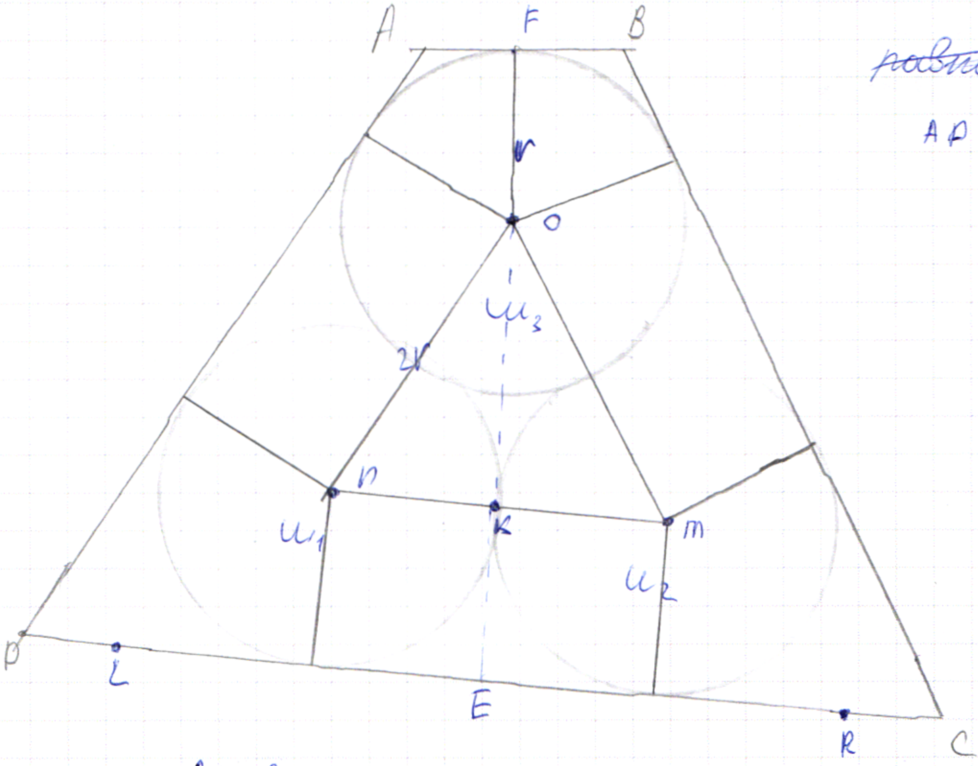


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



~~равнобокая трапе~~

$AD = BC$

$AD+BC-AB-CD=30$

$OK=$

$nK=r$

$On=2r$

$nK=\frac{1}{2}On \Rightarrow \angle nOK=30^\circ$

Аналогично $Om=2Km \Rightarrow \triangle Onm$ - равностор.

$\Rightarrow \frac{FE}{OK}=\frac{FL}{On}$

$\frac{(2+\sqrt{3})r}{\sqrt{3}r}=\frac{FL}{2r}$

$\cos 30^\circ=\frac{OK}{2r}$

$OK = 2r\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}2r = \sqrt{3}r$

$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}=\frac{FL}{2r}$

Перенесем AD точкой A в точку

$BC=AD=FL=\frac{4\sqrt{3}+6}{3}r$

рассм. $\triangle LFE$ $FE=OK+2r$

$|a|+$

$(|2-1|)^2$

1

3

$nO \parallel AD \Rightarrow FL \parallel On$

OK лежит на FE

$nK \parallel DC \Rightarrow nK \parallel LE$

$\triangle LFE$ подобен $\triangle nOK$

$LE = nK\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}r$

тогда $\Rightarrow$

$FB=CR$ $CR=\frac{4\sqrt{3}+6}{3}r$ $DC=LR+AB$

$|X|>0$ $x>0$ $-x<0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-004
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рассм. $\triangle ABG$ $\angle AOB = \angle NOM$ (верт)

$\angle ABO = \angle ONM$ (накр. леж.)

$\angle BAO = \angle OMN$ накр. леж.)

$\triangle ABO$ подобен $\triangle ONM$

$$\frac{OF}{OK} = \frac{AB}{nm}$$

$$AB = \frac{OF \cdot mn}{OK} = \frac{r \cdot 2r}{\sqrt{3} r} = \frac{2}{\sqrt{3}} r = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$$

$$DC = \left(\frac{4\sqrt{3}+6}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) r = \frac{6\sqrt{3}+6}{3} r = (2\sqrt{3} + 2) r$$

$AD + BC - AB - CD =$

$$= \frac{4\sqrt{3}+6}{3} r + \frac{4\sqrt{3}+6}{3} r - \frac{2\sqrt{3}}{3} r - \frac{6\sqrt{3}+6}{3} r =$$

$$= \frac{8\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 12 - 6}{3} r = \frac{6}{3} r = 2r = 30$$

$r = 15$

3

$$\begin{cases} \frac{x}{22} > y \\ \frac{x}{26} \le y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{700-21y}{22} > y \\ \frac{700-21y}{26} \le y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 700-21y > 22y & 700 > 43y \\ 700-21y \le 26y - 26 & 726 \le 47y \end{cases}$$

$x + 21y = 700$

$x = 700 - 21y$

$$\frac{726}{47} \le y < \frac{700}{43}$$

$$15\frac{21}{47} \le y < 16\frac{12}{43}$$

целые число только 16

$x = 700 - 21y = 700 - \cancel{315} = \cancel{400 - 15 = 385}$

$21 \times 15 = 105$, 315; 15×43; $43 \times 15 = 215$, 43, 645; $43 \times 17 = 301$, 43, 731; $47 \times 15 = 235$, 47, 705; 47×16; $43 \times 16 = 258$, 43, 688; $21 \times 15 = 105$

21×16 $\quad 320 \quad 336$

$700 - 336 = 400 - 36 = \cancel{370}\ 364$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$ax-3a\le 2$ $\quad |x|<2 \quad -2<x\le 2$

$|ax-3a|\le 2$

4. $|ax-3a| \le \sqrt{x-1}$ $\qquad x \ge 1$

1) $\begin{cases} ax-3a \le \sqrt{x-1} \\ -ax+3a \ge \end{cases}$

$\begin{cases} -ax+3a \le \sqrt{x-1} \\ ax-3a \le \sqrt{x-1} \end{cases}$ $\qquad a^2x^2-6a^2x+9a^2 \le x-1$

$a^2x^2-6a^2x+9a^2 \le x-1$

$ax-3a$ приним. знач. от $-\sqrt{x-1}$ до $+\sqrt{x-1}$ если длина 4, то

$2\sqrt{x-1}=4$

$\sqrt{x-1}=2$

5. 2, 5, 7 $\qquad$ 7 · 8 $\qquad$ 19

12

12

1 „7777777" $\quad$ 11 – „2",„5" $\quad$ 12 5

1 – 2 $\quad$ 10 – 5

2 – 2 $\quad$ 9 – 5

12!

3 – 2 $\quad$ 8 – 5

4 $\quad$ 7

5 $\quad$ 6

2^{11}

6 $\quad$ 5

7 $\quad$ 4

8 $\quad$ 3

9 $\quad$ 2

10 $\quad$ 1

7. в каждом промежутке числа можно записать как

$[v_1, v_2, v_3, v_4 \dots v_{25}]$, где v_1 при делении на 25 дает остаток 1

v_2 – 2, v_3 – 3, и так далее, соотв. ... нет ост. числа с

один. ост. мин. если числа мин.

~~1+2+3+4+5+26+27+28+29+30+51+52+53+54+55~~

$1+2+3+4+5+31+32+33+34+35+61+62+63+64+65+91+92+93+94+95=$

$16+76=92$ $\qquad$ $5\cdot25\cdot0+5\cdot25\cdot1+5\cdot25\cdot2+5\cdot25\cdot3+$

$1+2+3+4\dots+20$

$=15+5\cdot25+165+315+465=180+780=960$

186 + 186 = 372; 93; 465

66 + 66 = 132; 126 + 126 = 252; 63; 315

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-004
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5$

$\cancel{|ax-3a| = |3a-3a| = 0}$

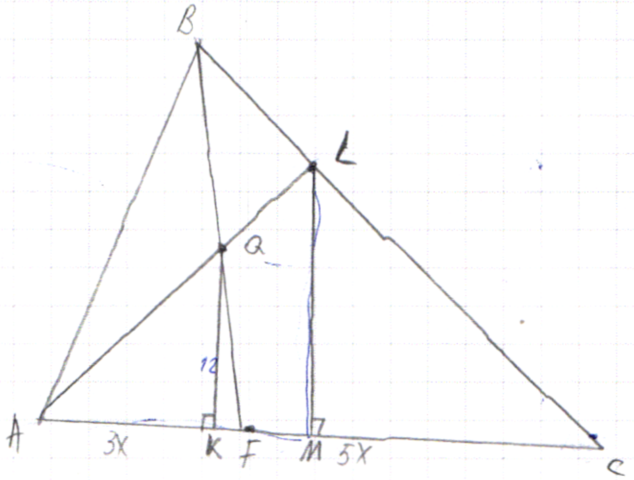
$\cancel{|ax-3a| = 5x-5a = |5a-3a| = 2a}$

$|5a-3a| \leq \sqrt{x^2-15}$

$|2a| \leq 2$

$-2 \leq 2a \leq 2$

$-1 \leq a \leq 1$



$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{4}{25}$

$QK = 12$

$S_{BAC} = S_{BAF} + S_{BFC}$

$\frac{S_{BAF}}{S_{BFC}} = \frac{3}{5}$

$S_{BFC} = \frac{5}{3} S_{BAF}$

$\frac{8}{3} S_{BAF} = S_{BAC}$

$AM = MC$

$AM = 4X = MC$ $\quad$ Δ AQK подобен Δ ALM

$\frac{QK}{LM} = \frac{AK}{AM} = \frac{3}{4}$

$CM =$

$LM = \frac{4QK}{3} = 16$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)