

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

В-014

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$ является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1.

$$y = 5x^2$$

$$1) 5x^2 = 125 \quad | :5$$

$$x^2 = 25$$

$x = \pm 5 \Rightarrow$ длина отсечённой линии равна 10.

$$2) 5x^2 = 80 \quad | :5$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

\Rightarrow длина отсечённой линии равна 8.

$$y = 5x^2$$

$$x = \pm 1 \quad y = 5$$

$$x = \pm 2 \quad y = 20$$

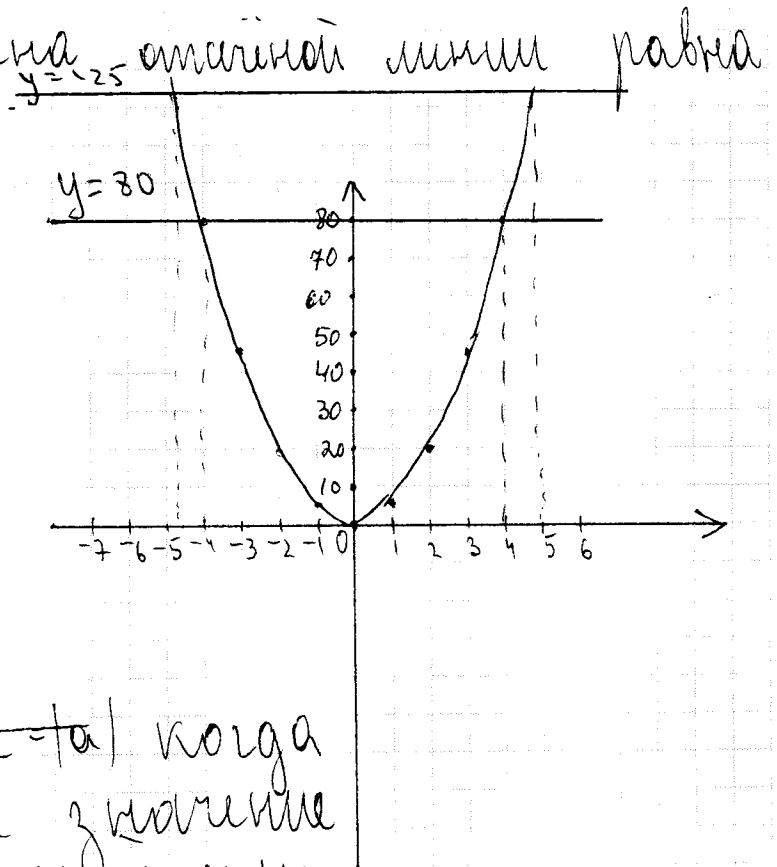
$$x = \pm 3 \quad y = 45$$

$$x = \pm 4 \quad y = 80.$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Есть 3 случая, $c = a$ когда c — это некоторое значение гипотенузы, меньший или больший катет. Пусть значение c

$$мы ищем $\Rightarrow 8^2 + 10^2 = c^2 \Rightarrow c = \pm \sqrt{164} \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{41} \Rightarrow x = \frac{c}{2} = \pm \sqrt{41} \Rightarrow$ значение параметра$$



равно $a = 5 \sqrt{41}^2 = 205$.

2) $10^2 = c^2 + 8^2 \Rightarrow c^2 = 10^2 - 8^2 = 36$

$c = \pm 6$, c - длина $\Rightarrow x = \frac{c}{2} = \pm 3$.

$5x^2 = a \Rightarrow a = 45$.

3) $8^2 = 10^2 + c^2$, такой вариант невозможен, т.к. $10^2 > 8^2$.

Ответ: радиус a может принимать значения 45 и 205.

Задача 2.

Из точек A, B, C и D к окружностям проведем касательные. Касательные из одной точки равны.
Из условия

$AD + BC - AB - CD = 28$

Рассмотрим центр O

угловик со стороной z ,

где радиусы + одной z или те касательные, а $z - 2r$ или d д

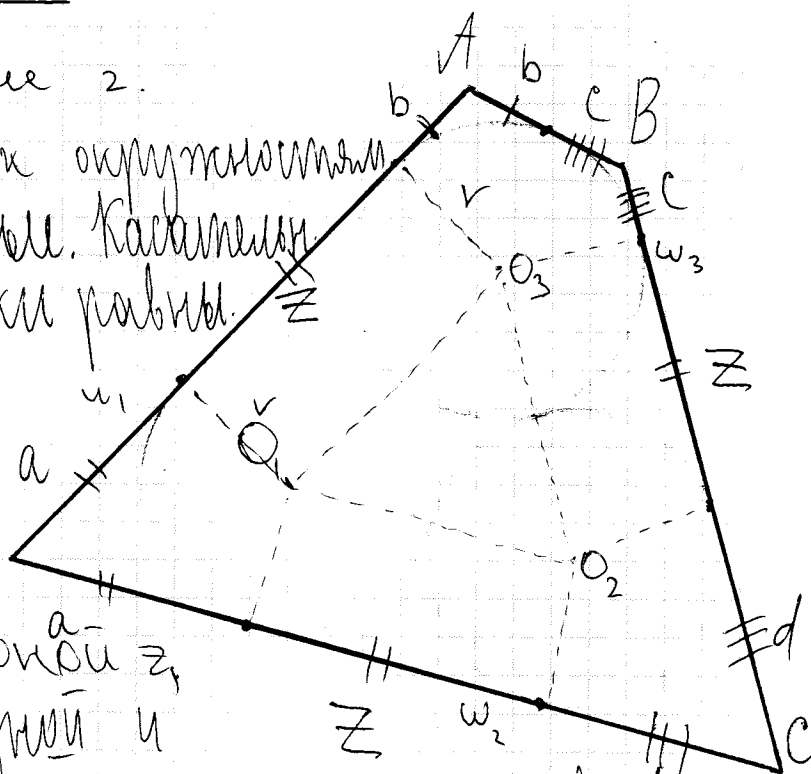
окружностей. Тасишем все стороны через обозначения. $\Rightarrow a + a + z + z + d + z - b - c - a - a - z = 28$. Приведем подобн. сч. \Rightarrow

$\Rightarrow z = 28$, а с другой стороны $z = 2r$.

$z = 2r = 28 \Rightarrow 2r = 28 \Rightarrow r = 14$.

$z = 2r = 28 \Rightarrow 2r = 28 \Rightarrow r = 14$.

Ответ: $r = 14$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

Назовём блок из 13 подряд идущих цифр
- В.

У нас есть 13 вариантов расстановок.

$$1) \underbrace{aaaa \dots aaa}_{12}, 12 \text{ а.}$$

$$2) \text{ а } \underbrace{aaa \dots aaa}_{11}$$

$$3) \underbrace{aa}_2 \text{ в } \underbrace{aaaaa \dots aa}_{10}$$

$$\dots$$

$$13) \underbrace{aaa \dots aaa}_{12} \text{ в}$$

Подсчитаем кол-во вариантов в 1 случае.
Оно равно $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}_{12} = 2^{12}$. Мы удаляем

2 варианта, так известно, что как
минимум одна цифра "5" и "8" -

точно есть \Rightarrow всего случаев 13, а в

каждом случае по $(2^{12} - 2)$ вариантов \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{Всего } (2^{12} - 2) \cdot 13.$$

$$(2^{12} - 2) = 4096.$$

Ответ: $(2^{12} - 2) \cdot 13 = 4096 \cdot 13 = 53,248.$

Задача №7.

$[1; 40], [41; 80], [81; 120], [121; 160]$.

Нужно, чтобы "—" не делилась на 40.

Это числа 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134.

Σ этих чисел $169 \cdot 10 = 1690$.

Меньше быть не можем, так как ~~всех~~ ~~взято~~ допустим из первого набора

берем 1, 2, 3, 4, 5, 6, тогда, чтобы

"—" / на 40 надо, чтобы из 2

набора взяли 47, 48, 49, 50, 51, 52 ⇒

⇒ из 3 набора надо взять 93,

94, 95, 96, 97, 98, а из 4 ~~121, 122, 123~~

набора 139, 140, ~~141, 142~~ 147, 148, 149, 150.

их сумма равна $53 \cdot 6 + 2354 \cdot 2 +$

$+ 245 \cdot 4 = 318 + 466 + 980 = 1464$. Если

мы в начале берем самые малень-

кие числа из каждого промежутка

то ^{с каждым шагом} мы должны увеличивать их

на 41, чтобы обеспечить / на 40, а

в последнем случае их придется

увеличить на 41, а потом про-

пустить несколько чисел, чтобы число

не оканчивалось на 41 и взять числа больше.

Ответ: $\Sigma \min = 1690$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

z - все страницы, а x - все марки.

$$15z < x$$

$$(17z - 1) > x$$

$$x + 22z = 900 \Rightarrow x = 900 - 22z.$$

$$17z - 17k > 900 - 22z > 15z$$

$$39z - 17k > 900 > 37z$$

$$z \leq \frac{900}{37} = 20 + \frac{160}{37} \Rightarrow z \leq 24.$$

$$24 \cdot 15 = \frac{240}{120} = \frac{360}{360}$$

$$22 \cdot 24 = 528.$$

$$\Rightarrow \text{до этого было } (528 - 900) = -372$$

$$17 \cdot 24 - 17k$$

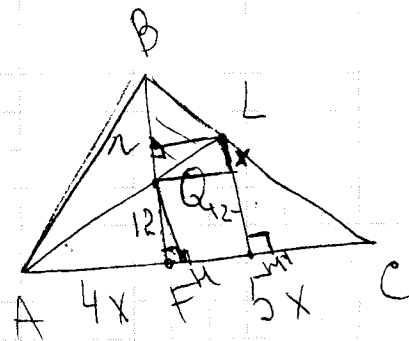
$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 17 \\ \hline 168 \\ 240 \\ \hline 408 \end{array} \quad 492$$

Ответ: 372 и марки.

Задача 6.

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{25}.$$

QH = 12
LM = ?



$QM \parallel LH$

$\triangle BQL \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$$S_{BFC} = \frac{5}{9} S_{ABC}$$

$$\frac{QM}{LH} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow LH = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15$$

Ответ: расстояние равно 15.

Задача 4.

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3} \quad \text{O.D.} \quad x \geq 3$$

$$\text{Если } a < 0, \Rightarrow |a(x+1)| \leq \sqrt{x-3} \quad 5 \leq 1$$

$$\text{Если } a > 0 \Rightarrow |a(x-1)| \geq \sqrt{x-3}$$

$$ax - a \leq -2a$$

$$ax - a \geq 2a$$

$$ax - a \leq \sqrt{x-3}$$

$$a - ax \geq \sqrt{x-3}$$

При любом значении

$$\text{При } a = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Ответ: } a = \pm \frac{1}{x+1}$$

$$a = -1$$

$$x = 4$$

$$-5 \leq 1$$

$$x = 7$$

$$8 \leq 2$$

$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x-3}$$

$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x-3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3}$$

$$(ax - a)^2 \leq x - 3$$

$$a^2x^2 - a^2x + a^2 - x + 3 \leq 0$$

$$[1; 40], [41; 80], [81; 120], [121; 160]$$

1, 2, 3, 4, 5, 6 ;

47, 48, 49, 50, 51, 52 ;

93, 94, 95, 96, 97, 98 ;

280

~~129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141~~
142, 143, 144

35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44,

125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134

$$169 \cdot 10 = 1690 \quad - \text{min } \sum$$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 47, 48, 49, 80, 51, 52.

93, 94, 95, 96, 97, 98, 139, 140, 141, 142, 143, 144.

$$99 \cdot 6 + 191 \cdot 6 =$$

$$6 (191 + 99) = 290 \cdot 6 =$$

$$1200 + 540$$

$$1740$$

Отв Веш: $\sum \text{числ} = 1690$.

ноя. 18 гг. числ.

... x x x x ... x x x

$$784 + 980 =$$

$$7 - 1764$$

1 вар: 12 числ, 1 му "5" и "8" ~~10~~ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$
2 вар: 1 число

Число годично

333333 - z
 1 вар: z x x ... x x x
 2 вар: x z x x x ... x x x
 3 вар: x x z x x x ... x x x

Блок из 6 чисел = 3 из них всегда 2 ч. характеризовано.

=> кол-во чисел в первом варианте равно $2^{10} - 2$
 => кол-во во втором варианте $2^{10} - 2$

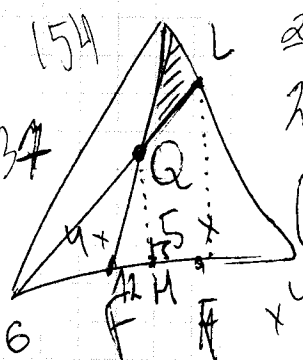
22335
22353
12355
22533
22535
22553

... (22+x) L = 900
 => в 12 вариантах $\Sigma = (2^{10} - 2) \cdot 13$

$(ax-a)^2 - x + 350$
 $a^2 - 2ax + a^2 - x + 350$
 $2a^2 - 2ax - x + 350$
 $2a^2 - x(2a+1) + 350$

22	3335	1	0
22	3535	1	0
22	3353	2	0
22	3533	2	0
22	3355	3	0
22	3555	3	0
22	5333	4	3
22	5335	4	3
22	5333	5	4
22	5353	5	4
22	5553	5	4
22	5355	5	4
22	5555	5	4

№6.
 $\frac{917}{39} = 780$
 $\frac{934}{39} = 780$
 $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$
 $256 \cdot 16 \approx 4096$
 $372 < 900 < 392 - 17$
 $900 - 372 > 0$
 $900 - 917 - 392 < 0$



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{25} = k \Rightarrow$
 $k = \frac{1}{5} \cdot 345$
 $-\sqrt{x-3} \leq |ax-a| \leq \sqrt{x-3}$
 $|ax-a| + \sqrt{x-3} \geq 0$
 $|ax-a| - \sqrt{x-3} \leq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3} \quad x \geq 3$$

Если $a > 0, \Rightarrow |a(x-1)| \leq \sqrt{x-3}$.

Если $a < 0, \Rightarrow |a(1+x)| \leq \sqrt{x-3}$.

$x=3$. $2a \leq 0$ $3a \leq 0$

$x=4$. $3a \leq 1$ $5a \leq 1$

$x=5$. $4a \leq \sqrt{2}$ $6a \leq \sqrt{2}$.

Поскольку модуль, то значения симметричны относительно 0. \Rightarrow

это выполняется, когда $\left(\frac{\sqrt{x-3}}{x-1} \right)^2$

$$\begin{cases} x-3 = -(x^2 - 2x + 1) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x - 3$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 2$$

$917 - m : 17$

$= 0$

$m : 17$

$k - 17 : 17$

17
 15
 85
 17

$$\sqrt{x-3} \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

285
 200

$$-ax - a \Rightarrow a | -x - 1) \Rightarrow |a(x+1)| \leq \sqrt{x-3}$$

$x \begin{matrix} 23 \\ 15 \\ 15 \\ 23 \\ \hline 345 \end{matrix}$

$2(5) : 11$
 44
 506

$x \begin{matrix} 22 \\ 23 \\ 66 \\ \hline 17 \\ 23 \end{matrix}$

$$\frac{x-3}{x-2} = 1$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$a(x-1) \leq \sqrt{x-3}$$

$$ax \leq \sqrt{x-3}$$

Всего исправлений z . Всего марок x .

$$\begin{aligned} 15z &< x \\ 17z - 17 \cdot k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &> 15z \\ x &< 17(z-1) \end{aligned}$$

$$x + 2z = 900.$$

382

$$110z \Rightarrow z = 22,5.$$

~~416~~

$$137(z) = 900.$$

$$z > 21.$$

~~484~~

416.

$$17(z-1) = 416.$$

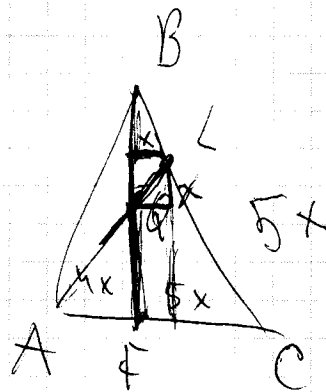
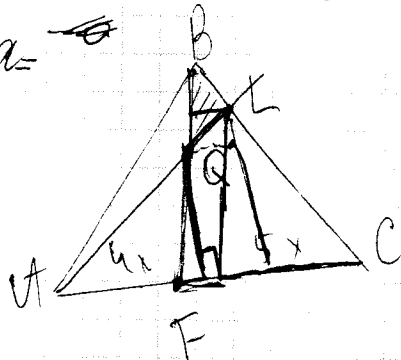
$$933 = 17z.$$

$$\begin{aligned} -x + a & \Rightarrow \\ -3a & \leq 1 \\ a & \leq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$|ax - a| \leq \sqrt{1-3}, \quad a \leq \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} 3a & \leq 1 \\ a & \leq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5a & \leq 1 \\ a & \leq 0,2. \end{aligned}$$



$$(4x)^2 + 12^2 = 17^2$$

$$\frac{S_{ABF}}{S_{CBF}} = \frac{4}{5}$$

$$16x^2 + 12^2 = 17^2$$

$$25x^2 + 12^2 + 24x + x^2 = x^2 + 24x + 12^2$$

$$10x^2 + 24x - x\sqrt{2} = 0.$$

$$10x^2 + x(24 - \sqrt{2}) = 0.$$

$$x(10x + 24 - \sqrt{2}) = 0.$$

$$x = 0.$$

$$10x = \sqrt{2} - 24.$$

$$x = \frac{\sqrt{2} - 24}{10}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$y = 5x^2$ перес. $y = 125$.

$y = 80$

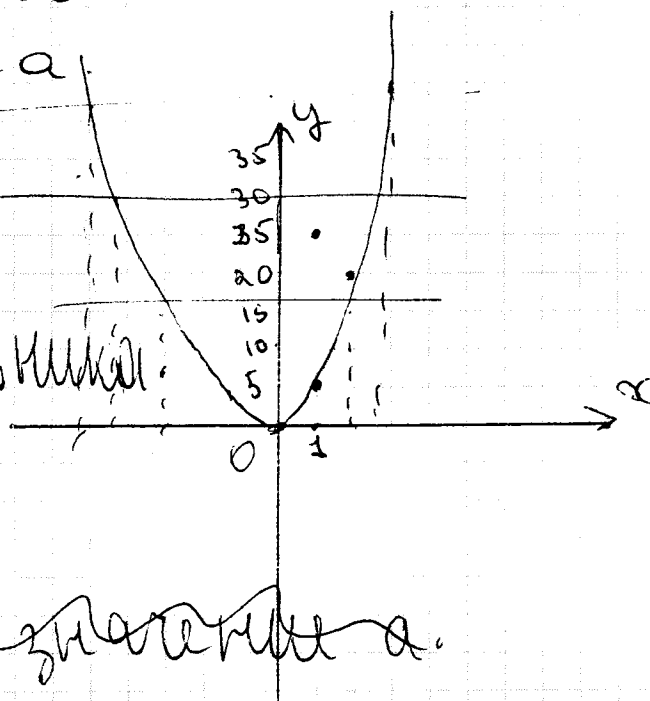
$y = a$

$5x^2 = 120 \Rightarrow x = \pm\sqrt{24}$

$5x^2 = 80 \Rightarrow x = \pm\sqrt{18}$

\Rightarrow стороны треугольника:

$2\sqrt{24}; 2\sqrt{18}$



$a^2 + b^2 = c^2$

$4 \cdot 24 + 4 \cdot 18 = c^2$, ~~с значением a~~

$4(42) = 168$

$c = \sqrt{168} = 24\sqrt{42}$

2, 3, 7 не раскл.

Всего три случая, когда

a - гипотенуза.

a - наиб. катет.

a - наим. катет.

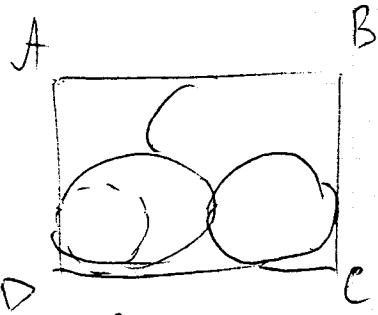
1) $4 \cdot 24 + 4 \cdot 18 = a^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{42} \Rightarrow$ значение параметра $-\sqrt{42}$.

2) а) $4 \cdot 18 + a^2 = 4 \cdot 24 \Rightarrow$

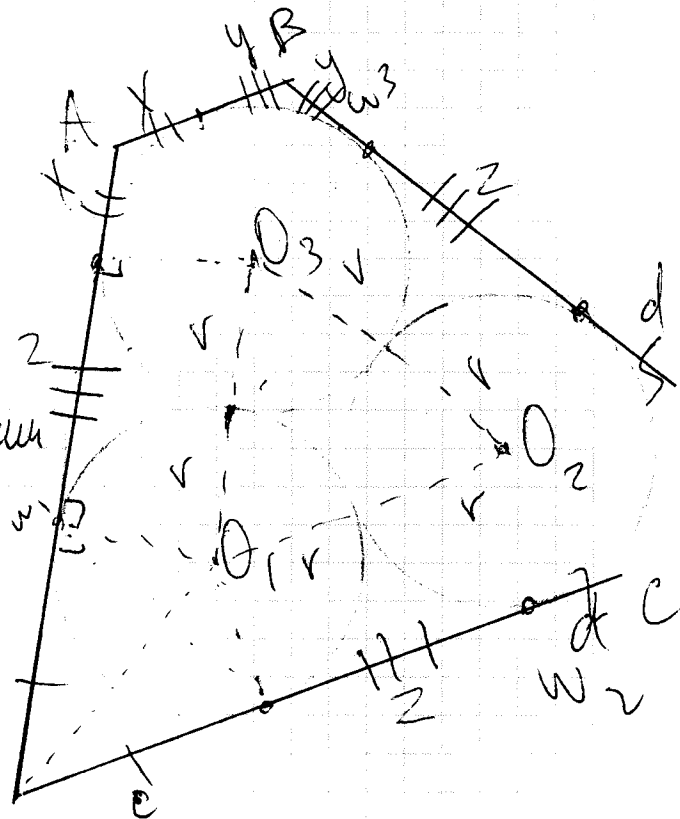
$a^2 = 4 \cdot 6 = a = 2\sqrt{6}$

$2\sqrt{24} + a^2 > 2\sqrt{18}$

3) третий случай невозможен, т.к. $4\sqrt{18}$



z - равна длине отрезка $AD + BC - AB - CD = 2B$.
 Если он равен нулю, то $z = 0$.
 Если он равен z , то $z = 2B$.



$z + z + x + y + z + d - x - y - z - d = z$
 $z = 28 \Rightarrow z - d \text{ окр.} \Rightarrow r = \frac{z}{2} = 14$
 $z = 28$

Радиус: 14.

$$|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$$

$$(ax - a)^2 \leq x - 3$$

$$a^2 x^2 - 2a^2 x + a^2 - x + 3 \leq 0$$

$$a^2 (x - 1)^2 - 2a^2 (x - 1) + a^2 - x + 4 \leq 0$$

$$a^2 (x + 1)^2 - 2a^2 (x + 1) + a^2 - x + 2 \leq 0$$

$$a^2 ((x + 1)^2 - (x - 1)^2) - 2a^2 (x + 1 - x + 1) - 2 \leq 0$$

$$a^2 (2x) - 4a^2 - 2 \leq 0$$

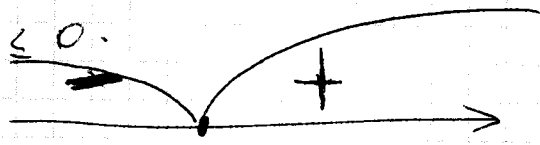
$$2a^2 (x - 2) - 2 \leq 0$$

$$2x - 4 - 2 \leq 0$$

$$2x - 6 \leq 0$$

$$2x \leq 6$$

$$x \leq 3$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|a(x-1)| - \sqrt{x-3} \leq 0.$$

$$|a(x-1)| \geq \sqrt{x-3}$$

$$\geq 2a \quad x \geq 3.$$

или $x \in (b-1; b+1)$.

$$|ax-a| \leq \sqrt{x-3}$$

$$|a(x-1)| \geq 2.$$

$$z \geq 15 < x$$

$$17(z-1) = x.$$

$$x + 22z = 900.$$

$$17z - 17 + 22z = 900.$$

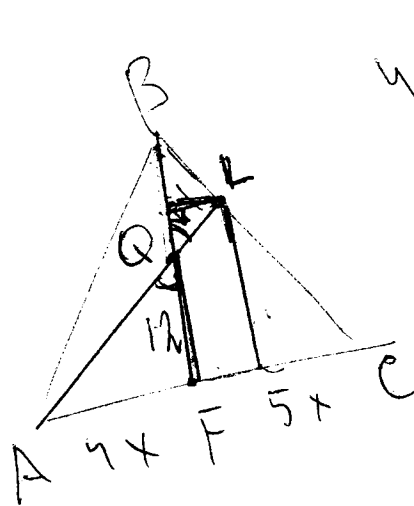
$$39z = 917 \Rightarrow z = \frac{917}{39}.$$

$$114$$

$$137$$

$$480. \Rightarrow z = 23 \frac{20}{39}.$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{25}.$$



$$108x$$

$$\frac{BF \cdot 9x}{2} = 25 \cdot BQ.$$

$$12 \cdot y$$

$$\frac{(12+y)9x}{2} = \frac{25 \cdot y}{2}.$$

$$108x + 9xy = 25y \cdot kx.$$

$$x > 15z$$

$$x \leq 17(z-1)$$

$$900 = 22z + x$$

$$900$$

$$900 = 38z$$

$$\frac{900,5}{38} = z \Rightarrow z = 20 + 3 +$$

$$160.$$

$$148,5 \cdot 5x^2 = a$$

$$114.$$

$$4a$$

$$a = \pm 3.$$

$$x = \frac{322 - 17}{2}$$

$$x = 162 - 8,5.$$

$$\textcircled{a} = 20 \cdot 4$$

ты

$$47 \cdot 6 + 207 \cdot 6 =$$

$$= 6(254)$$

$$= 1524$$

1	...	6
41	...	46
81	...	86
121	...	126

$$37z$$

$$a(x-1)$$

$$\frac{345}{380} \quad \frac{23}{24}$$

$$5.4) \quad 10^2 - 9^2 = 5.$$

ты

$$\frac{345}{38}$$

$$x^2 - c = \pm 1 \quad c = \pm 6, \\ x = 900 - 22z.$$

$$a(x-1) \leq \sqrt{x-3} \\ a(1-x) \geq \sqrt{x-3}$$

$$11a \leq 3$$

$$a \quad 10a \leq \sqrt{8}$$

$$9a \leq \sqrt{7}$$

$$8a \leq \sqrt{6} \quad 9 = 45$$

$$\frac{1}{100}$$

$$7a \leq \sqrt{5}$$

$$6a \leq 2\sqrt{4}$$

$$5a \leq \sqrt{3}$$

$$4a \leq \sqrt{2}$$

$$3a \leq \sqrt{1}$$

$$2a \leq 0 \quad a$$

$$\frac{10}{102} - \frac{12}{11}$$

$$a(x-1) \leq \sqrt{x-3}$$

$$a \leq \frac{3}{11} \quad 3a \leq \frac{1}{10}$$

$$4a \leq \frac{1}{10} \quad a \leq \frac{1}{40}$$

$$\frac{\sqrt{x-3}}{x-1} = 1 \quad a \in \left(-\frac{1}{13}, \frac{1}{13}\right)$$

$$a \in \left(-\frac{1}{13}, \frac{1}{13}\right)$$

$$164 \cdot 4 = 656$$

$$5x^2 = \sqrt{41}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{41}{25}}$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \quad x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$D = 9 - 16 < 0$$