

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР

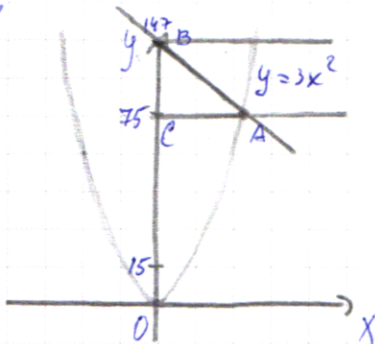
5-024

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $4 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



Решение

$$1) y = 3x^2$$

Узнаем чему равен x на параболке
при $y = 75$.

$$75 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 25, \text{ а } x = \pm 5$$

Т.к. мы рассматриваем только при положительных
 x , то $x = 5$.

$$2) BC = OB - OC = 147 - 75 = 72, \text{ а так } A(5; 75), \text{ то } CA = 5.$$

3) По формуле Пирамиды формула BA будет

$$y = -kx + b;$$

$$-k = \frac{y}{x} - b;$$

$$-k = \frac{75 - 147}{5};$$

$$-k = -14,4;$$

$$k = 14,4 = \frac{72}{5};$$

$$y = -14,4x + 147;$$

4) Т.к. надо найти в формуле $y = a$, то

$$0 = -14,4x + 147$$

$$\text{Ответ: } -14,4x + 147.$$

№3

I первой алгебра, II - второй алгебра.

I

x - кол-во сы. z - кол-во сы.

b - остаток марш.

y - всего марш

$y - ?$

$$1) 22x + b = y;$$

$$26z = y \quad z \in [1; x-1]; \quad z \in \mathbb{N};$$

1, т.к. нам минимум на одну единицу
было намешало марш

$x - 1$, т.к. на крайней мере останется одна единица марш.

II

$$2) 21x + 22x + b = 700;$$

$$43x + b = 700;$$

Рассмотрим b , как остаток от деления 700 на 43.

$$\begin{array}{r|l} 700 & 43 \\ \underline{43} & 16 \\ 270 & \\ \underline{258} & \\ 12 & \end{array}$$

Сравнительно $b = 12$.

$$43x = 688;$$

$$x = 16;$$

$$3) y = 22x + b$$

$$y = 16 \cdot 22 + 12 = 364.$$

4) Для проверки возьмем равняю $26z = y$, где

$$z \in \mathbb{N}; \quad z = \frac{y}{26} = \frac{364}{26} = 14.$$

Ответ: изначально y всего было 364 марш.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$[1; 25]$; $[26; 50]$; $[51; 75]$; $[76; 100]$.

Чтобы сумма была минимальной нужно в этих промежутках брать самое маленькое число, но нам соответственно это не подходит, следовательно:

Затем в 5 рядов это промежутки, выписывая самое маленькое число.

A	1	2	3	4	5	$S(A) \geq 15$
B	26	27	28	29	30	$S(B) \geq 140$
C	51	52	53	54	55	$S(C) \geq 265$
D	76	77	78	79	80	$S(D) \geq 390$

Начиная с последнего числа начинаем увеличивать и заменять, в результате убрал числа мы не должны получить числа ~~25, 50, 75, 100~~ 25, 75, 50, (100 быть не может, т.к. оно макс. и в результате вычитания нельзя его получить)

В результате должно получиться. Сумма всех этих чисел равна 896.

16	15	12	13	14
34	33	36	32	31
51	55	53	61	60
76	77	78	79	80

№4

$$|0,1x - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$x=4$$

$$|4a - 3a| \leq \sqrt{3}$$

$$|a| \leq \sqrt{3}$$

$$- \sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$$

$$a \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

$$\text{Ответ: } [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

№5

Т.е. число 19-значное, то а в нём равно восьми идущих подряд 7, но нужно рассмотреть 12 случаев, поскольку новой цифрой это может быть 1 этих восьми цифр.

Каждой цифрой рассмотрим:

$$1) C_{abidefgh}^2 = abede$$

$$C_{99999999}^2 = \frac{99999999!}{(99999999-2)! 2!} = \frac{99999998 \cdot 99999999}{2}$$

$$x = x$$

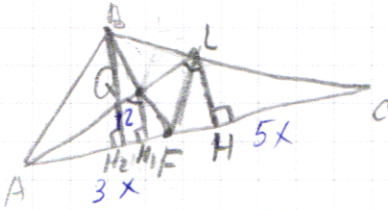
Каждой последующей цифрой будет таким же

$$12x = 6 \cdot 99999998 \cdot 99999999$$

$$\text{Ответ: } 6 \cdot 99999998 \cdot 99999999$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

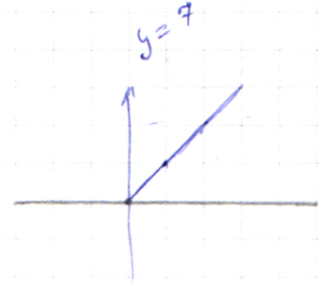
6.



$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3FC = 5AF \Rightarrow FC = \frac{5AF}{3}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{4}{25} \quad QH_1 = 12$$

LH-?



1) $QH_1 \parallel LH$

2) Т.к. $\frac{S_1}{S_2} = k^2$, то $\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = k^2 \Rightarrow k = \frac{2}{5}$

3) $\triangle AQL_1 \sim \triangle ALH$

4) $AC = \frac{8AF}{3}$

5) $\frac{LH}{QH_1} = \frac{AL}{AQ} = \frac{AH}{AH_1}$

$\angle AQL_1 = \alpha \Rightarrow \angle LQH_1 = 180^\circ - \alpha$

7) $S_{AQF} = 24x$; $S_{ALC} = 4x \cdot HL$

$S_{ADC} = 4x \cdot BH_2$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ALC}} = \frac{BH_2}{HL} \Rightarrow HL = \frac{S_{ALC} \cdot BH_2}{S_{ABC}} = \frac{S_{ALC} \cdot BH_2}{6,25 S_{BQL}} = \frac{S_{ALC} \cdot BH_2}{6,25 \cdot \frac{4}{25} S_{BAC}} = \frac{S_{ALC} \cdot BH_2}{1 S_{BAC}} = \frac{S_{ALC} \cdot BH_2}{S_{BAC}}$$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} LH \cdot AH + \frac{1}{2} LH \cdot HC = \frac{1}{2} LH (AH + HC) = 4x \cdot HL =$

$= 24x + \frac{4x \cdot HL}{2}$

40 + 150 + 15 + 300 + 15 + 280 + 30 + 30 = 720 + 190 = 910

1) [1; 25]; [26; 50]; [51; 75]; [76; 100]

$S(A) \geq 15$ $S(B) \geq 390$
 $S(B) \geq 140$ 25, 50, 75, 100
 $S(C) \geq 265$ 16
 $x = 420 + 300 + 176 = 896$
 $= 210 + 210 + 120 + 180 + 176 = x$
 $30 + 40 + 70 + 65 + 110 + 165 = 210 + 55 + 140 + 21$

1+2+3+4+5 = 15
 26+27+28+29+30 = 140+14 = 154
 31+32+33+34+35 = 160+105 = 265
 76+77+78+79+80 = 280+80+13+17 = 360+80 = 350
 14+15+16+17+18+19+20 = 32+33+34+35+36+37+38 = 210+110 = 320
 51+52+53+54+55+56+57+58+59+60 = 76+77+78+79+80 = 350

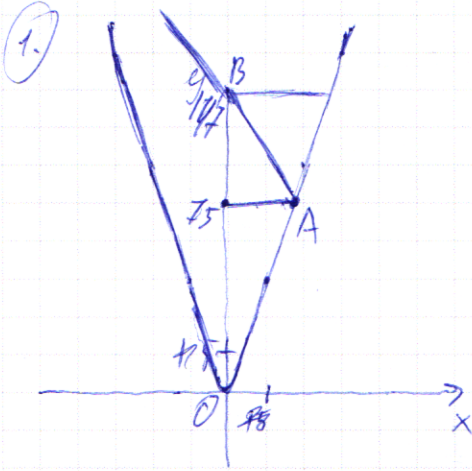
4. $|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$
 $|a| \leq \sqrt{3}$
 $a \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$

$$\begin{array}{r} 5109 \mid 3 \\ 1703 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5109 \mid 3 \\ 1703 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1703 \mid 7 \\ 14 \quad 243 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 23 \\ -21 \\ \hline 2 \end{array}$$

y=x



$$y = -3x + 6$$

$$y = 3x^2$$

$$75 = 3x^2$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

$$A(5; 75)$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 63 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 75 \\ \hline 219 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ \times 73 \\ \hline 219 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 378 \\ \times 72 \\ \hline 294 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 511 \\ \times 29 \\ \hline 459 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 72 \\ \hline 10368 \end{array}$$

$$AB = \sqrt{5^2 + (75 - 147)^2}$$

$$l = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{5^2 + 72^2} = \sqrt{5109}$$

$$y = -kx + 72 \quad -kx + 147$$

$$75 = -k \cdot 5 + 147$$

$$-5k = -72$$

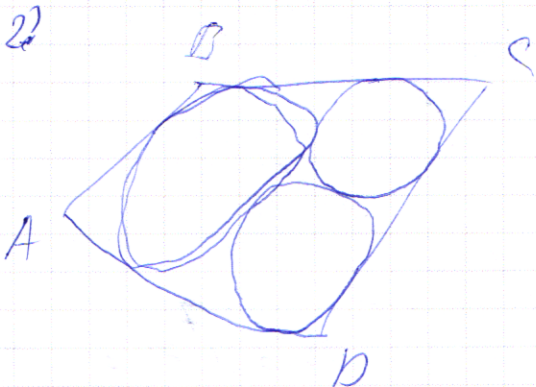
$$k = \frac{72}{5} = 14,4$$

$$y = -14,4x + 147$$

$$D = -14,4x + 147$$

$$y = 3x^2$$

$$75 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$



$$r_1 = r_2 = r_3$$

$$r_1, r_2, r_3 \text{ — ?}$$

$$AD + BC \neq AB + CD \neq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = ?$

~~$22x + b = 26x +$~~

$$\text{I } 22x + b = 26(x-1)$$

$$22x + b = 26x - 26$$

$$b = 26x - 26$$

$$\text{II } 21x + 26x - 26 = 700$$

$$47x = 726$$

$$x = \frac{726}{47}$$

$$\text{I } 22x + b = y$$

$$26z = y \quad z \in [1; x-1]$$

$$\text{II } 21x + 22x + b = 700$$

$$43x + b = 700 \Rightarrow b = 12$$

$$\begin{array}{r} 688 \overline{) 43} \\ \underline{-17} \\ 258 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 700 \overline{) 43} \\ \underline{-43} \\ 258 \\ \underline{-258} \\ 12 \end{array}$$

$$43x = 688$$

$$x = 16$$

$$y = 16 \cdot 22 + 12 = 364$$

$$\begin{array}{r} 864 \overline{) 26} \\ \underline{-26} \\ 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 22 \\ \hline 32 \\ + 32 \\ \hline 352 \end{array}$$

abcd efg h i j k l m n o p q r s t
 $19 - 8 = 11$ свободн
 C
 1+

$$C_n^k =$$

$$C_{19}^{11} = \frac{n!}{(n-k)!k!} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-024
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)