

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР

9-4

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- ⑦ 1) [1, 25]
2) [26, 50]
3) [51, 75]
4) [76, 100]

- 1) 1, 3, 5, 7, 9 $S_1 = 25$
2) 49, 47, 45, 43, 41 $S_2 = 225$
3) 52, 54, 56, 58, 60 $S_3 = 280$
4) 100, 98, 96, 94, 92 $S_4 = 480$

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 250 + 760 = 1010$$

Ответ: наименьшая сумма чисел равна 1010.

5 5 5 2 2 2 2 2 2 2

5 5 2 5 . . .

5 5 2 2 5 . .

5 . . .

5 . . .

5 . . .

5 . . .

5 . . .

5 . .



5 2 5 5 2 2 2 2 2 2

5

5

5

5

5

5

8

2 5 5 5 2 2 2 2 2 2

5

5

5

5

5

5

5

8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} -\frac{18}{5}k + 3220 > 0 \\ -\frac{22}{5}k + 3780 < 0 \end{cases} \begin{cases} k < -3220 : (-\frac{18}{5}) \\ k > -3780 : (-\frac{22}{5}) \end{cases} \begin{cases} k < \frac{3220 \cdot 5}{18} \\ k > \frac{3780 \cdot 5}{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < \frac{1610 \cdot 5}{9} \\ k > \frac{1890 \cdot 5}{11} \end{cases} \begin{cases} \lceil \frac{1610 \cdot 5}{9} \rceil = 173 \\ \lfloor \frac{1890 \cdot 5}{11} \rfloor = 171 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 1610 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 71 \\ \underline{63} \\ 80 \\ \underline{72} \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1890 \overline{) 11} \\ \underline{11} \\ 79 \\ \underline{77} \\ 20 \end{array}$$

$$\left\lceil \frac{1890 \cdot 5}{11} \right\rceil < k < \left\lfloor \frac{1610 \cdot 5}{9} \right\rfloor$$

$$\text{Ответ: } \left\lfloor \frac{1890 \cdot 5}{11} \right\rfloor < k < \left\lfloor \frac{1610 \cdot 5}{9} \right\rfloor \quad \checkmark$$

$$k = 172$$

4)

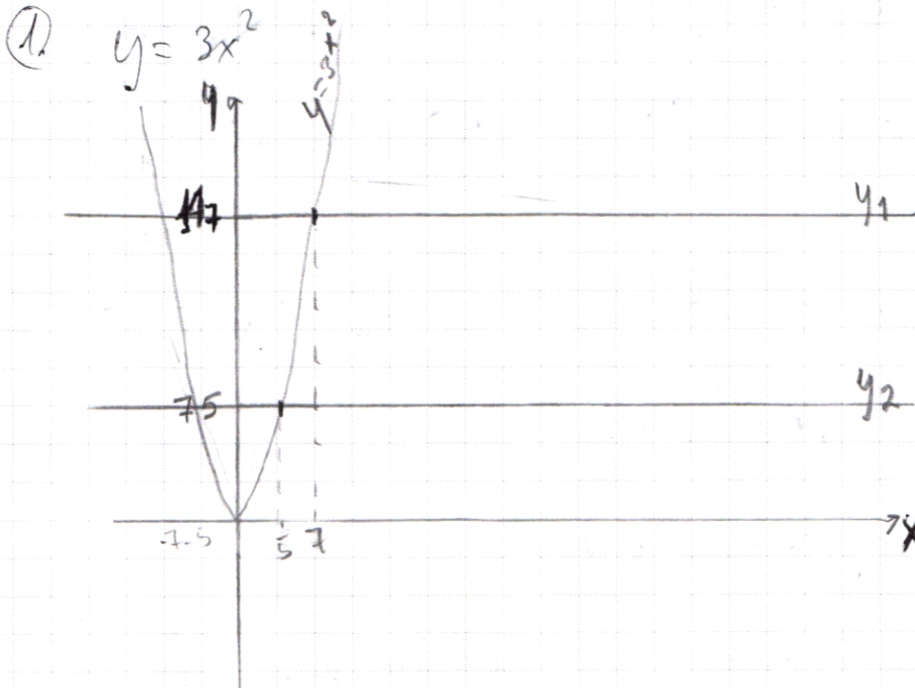
$$a - ? \quad |ax - 3a| \leq \sqrt{x-1} \quad ; \quad x = 4$$

$$|4a - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$|a| \leq \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3} \quad ; \quad a \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x_1| = \sqrt{147/3} = \sqrt{49} = 7$$

$$|x_2| = \sqrt{75/3} = \sqrt{25} = 5$$

$$1) \quad a_x^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = \sqrt{74}^2$$

$$2) \quad a_x^2 + 5^2 = 7^2; \quad a_x^2 = 49 - 25 = 24; \quad a_x = \sqrt{24}$$

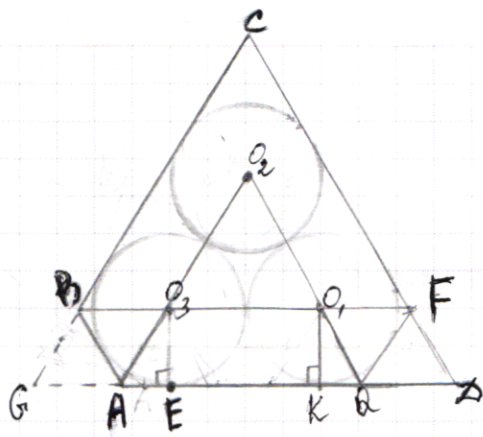
$$y = a; \quad a = 3a_x^2$$

$$1) \quad a = 3 \cdot 74 = 222$$

$$2) \quad a = 3 \cdot 24 = 72$$

Ответ: $a = 222; a = 72.$

2



$$AD + BC - AB - CP = 30$$

$$AD + BC - (AB + CP) = 30$$

$$AB \parallel ED \Rightarrow AB = ED; AD = BF$$

$$AB = ED = x \Rightarrow$$

$$AD + BC - CF - 2x = 30$$

$$AD - 2x = 30$$

Проведем $QF = FD$ и $QF = CB$. $\Rightarrow AQ = 30$; $AQ = 3FD \Rightarrow$
 $\Rightarrow AO_3 = 30/3 = 10$;

$\triangle AO_3E$: $AO_3 = 10$; $\angle AO_3E = 30^\circ \Rightarrow AE = 10/2 = 5$. Найдём O_3E :

$$O_3E = \sqrt{AO_3^2 - AE^2} = \sqrt{50}$$

Ответ: π окружности $= \sqrt{50}$

3

Пусть кол-во листов в альбоме n . Пусть кол-во марок k . $k = ?$

$$\begin{cases} k - 22n > 7 \\ k - 26n < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k - 23n > 0 \\ k - 27n < 0 \end{cases}$$

$$21n + k - 26n = 700$$

$$k - 5n = 700$$

$$n = \frac{k - 700}{5} = \frac{k}{5} - 140$$

$$\begin{cases} k - \frac{23k}{5} + 23 \cdot 140 > 0 \\ k - \frac{27k}{5} + 27 \cdot 140 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{18}{5}k + 3220 > 0 \\ -\frac{22}{5}k + 3780 < 0 \end{cases}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

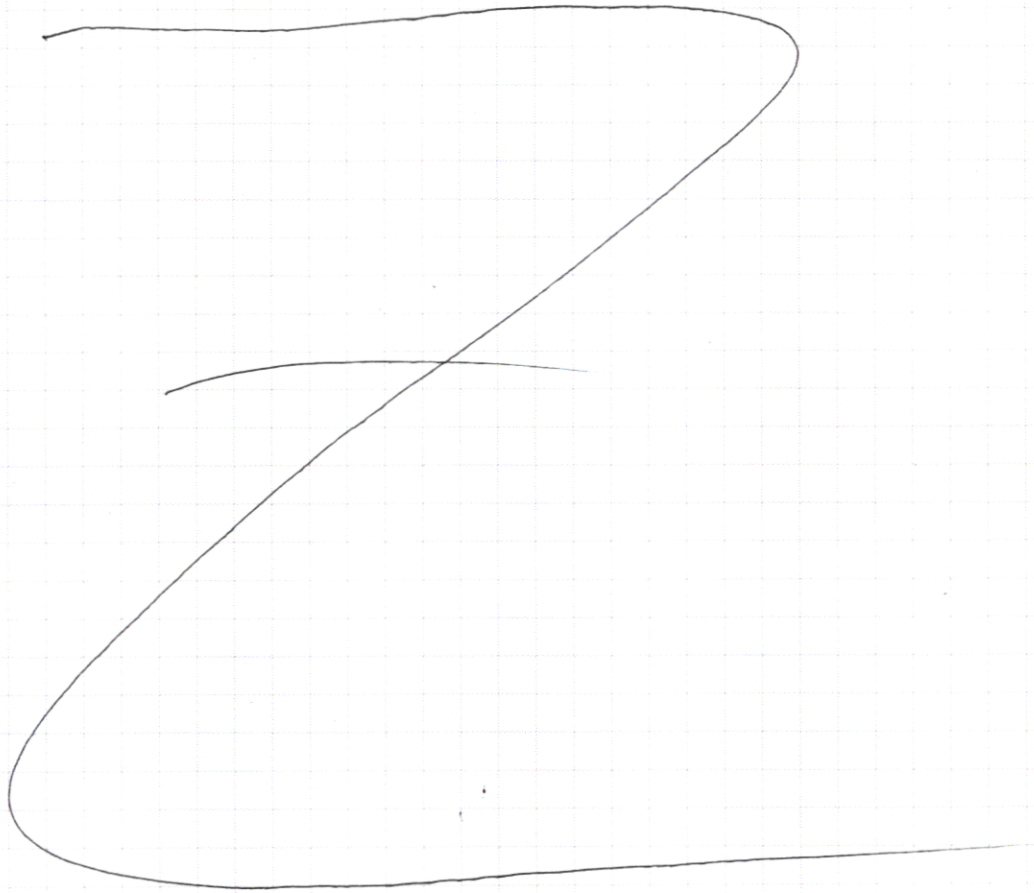
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-4

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)





9-4

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

