

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР

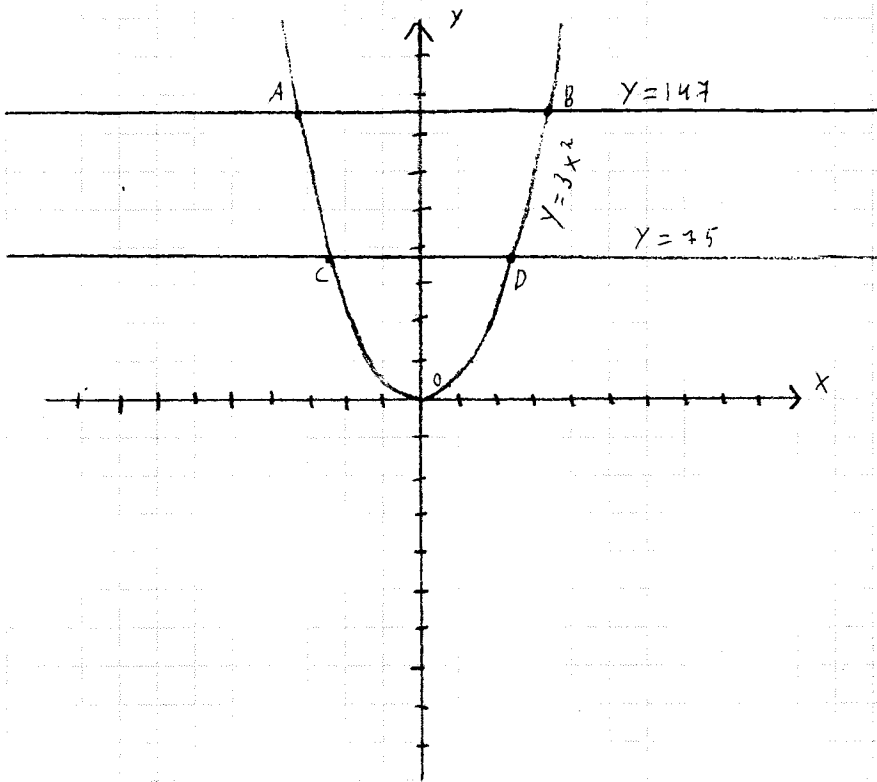
13-007

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1



Для начала найдем отрезок CD:

Подставляем $y = 75$ в $y = 3x^2$.

$$75 = 3x^2$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

Складываем модули обоих корней, чтобы найти CD.

$$CD = |x_1| + |x_2| = |-5| + |5| = 5 + 5 = 10$$

Теперь находим отрезок AB

Подставляем $y = 147$ в $y = 3x^2$:

$$147 = 3x^2$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm 7$$

Складываем модули обоих корней, чтобы найти АВ:

$$AB = |x_1| + |x_2| = |-7| + |7| = 7 + 7 = 14$$

В таком случае, у нас 2 варианта:

1) АВ и CD катеты (рассматриваем только один случай, так как если поменять катеты местами длинами гипотенузы не изменится)

2) АВ - гипотенуза, а CD - катет ($CD < AB \Rightarrow$ CD не может быть гипотенузой, также не имеет смысла, какой катет будет CD, первый или второй, без этого не ~~можно~~ зависит длинами оставшегося катета)

Вариант 1:

Находим гипотенузу:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = AB^2 + CD^2$$

$$c = \sqrt{AB^2 + CD^2}$$

$$c = \sqrt{196 + 100}$$

$$c = \sqrt{296} = 2\sqrt{74}$$

Вариант 2:

Находим катет:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = AB^2 - CD^2$$

$$a = \sqrt{AB^2 - CD^2}$$

$$a = \sqrt{196 - 100}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

Теперь, подставляем результаты обоих вариантов

В $y = 3x^2$:

1) Делим результат на два, так как по предыдущему опыту нам стало памято, что $x = \frac{1}{2}$ длины

отрезка:

$$2\sqrt{74} : 2 = \sqrt{74}$$

$$y = 9$$

$$a = 222$$

$$y = 3x^2$$

$$y = 3(\sqrt{74})^2$$

$$y = 3 \cdot 74 = 222$$

2) Делаем то же самое со 2 вариантом:

$$4\sqrt{6} : 2 = 2\sqrt{6}$$

$$y = 9$$

$$a = 72$$

$$y = 3x^2$$

$$y = 3(2\sqrt{6})^2$$

$$y = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$$

Ответ: При $a = 222$
или

При $a = 72$

Задача №3

Пусть x - количество марок, а y - количество листов в альбоме, тогда:

$$\begin{cases} \frac{x}{22} > y & (1) \\ \frac{x}{26} < y - 1 & (2) \\ x + 21y = 700 & (3) \end{cases}$$

1) $\frac{x}{22} > y$

$$x > 22y$$

2) $\frac{x}{26} < y - 1$

$$x < 26y - 26$$

3) $x + 21y = 700$

$$x = 700 - 21y$$

Подставляем значение x в выражение №1

$$700 - 21y > 22y$$

$$43y < 700$$

Решаем столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 700 & 43 \\ \hline 43 & 16,2... \\ \hline 270 & \\ \hline 258 & \\ \hline -120 & \\ \hline 86 & \\ \hline & \dots \end{array}$$

Отсюда узнаём что

$700/43$ не меньше,

чем $16,2$, следовательно:

$$y < 16,2$$

По аналогии работаем с выражением №2

$$700 - 21y < 26y - 26$$

$$47y > 726$$

Отсюда:

$$y > 15,5$$

$$\begin{array}{r|l} 726 & 47 \\ \hline 47 & 15,4... \\ \hline 256 & \\ \hline 235 & \\ \hline 210 & \\ \hline -188 & \\ \hline & \dots \end{array} \quad \text{(Не больше, чем } 15,5)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получаем выражение:

$$15,5 < y < 16,2$$

$$y \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 16$$

Подставляем значение y в выражение №3:

$$x = 700 - 336 = 364$$

Ответ: 364 марки.

Задача №4

$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

ОДЗ:

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

Отсюда ~~$x \leq 5$~~ или $x < 5$.

Подставляем значение $x = 5$:

$$|5a - 3a| \leq \sqrt{5-1}$$

$$|5a - 3a| \leq 2$$

При $a > 0$:

$$5a - 3a \leq 2$$

$$2a \leq 2$$

$$a \leq 2 \quad (a = 2)$$

При $a < 0$:

$$-(5a - 3a) \leq 4$$

$$-5a + 3a \leq 4$$

$$-2a \leq 4$$

$$a \geq -2 \quad (a = -2)$$

Ответ: $a = 2$

Или

$$a = -2$$

Задача №5

Вариантов расположения цифр "7", $19 - 8 + 1 = 12$

Варианты расположения остальных цифр.

Хотя это и покажется странным, но я начал работать с двоичной системой счисления, где "2" - 0 и "5" - 1, тогда всего будет:

IIIIIIIIIIII₂ комбинаций

Переводим в десятичную СС:

$$IIIIIIIIIIII_{2} = 2047_{10}$$

Убираем варианты 5555555555 и 22222222222.

$$2047 - 2 = 2045$$

Умножаем на варианты расположения цифр "7".

$$2045 \cdot 12 = 24540$$

Ответ: 24540 чисел

Задача №7

Мысленно пронумеруем числа в каждом множестве от 1 до 25.

Чтобы разность чисел не делилась на 25,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Нельзя использовать ~~каждый~~ каждый номер числа ровно **ОДИН** раз.

Самым рациональным решением будет использовать номера от 1 до 20, используя в первом множестве от 16 до 22, во втором от 11 до 15, в третьем от 6 до 10 и в четвертом от 1 до 5.

Первое множество:

21, 22, 23, 24, 25.

Второе множество:

36, 37, 38, 39, 40.

Третье множество:

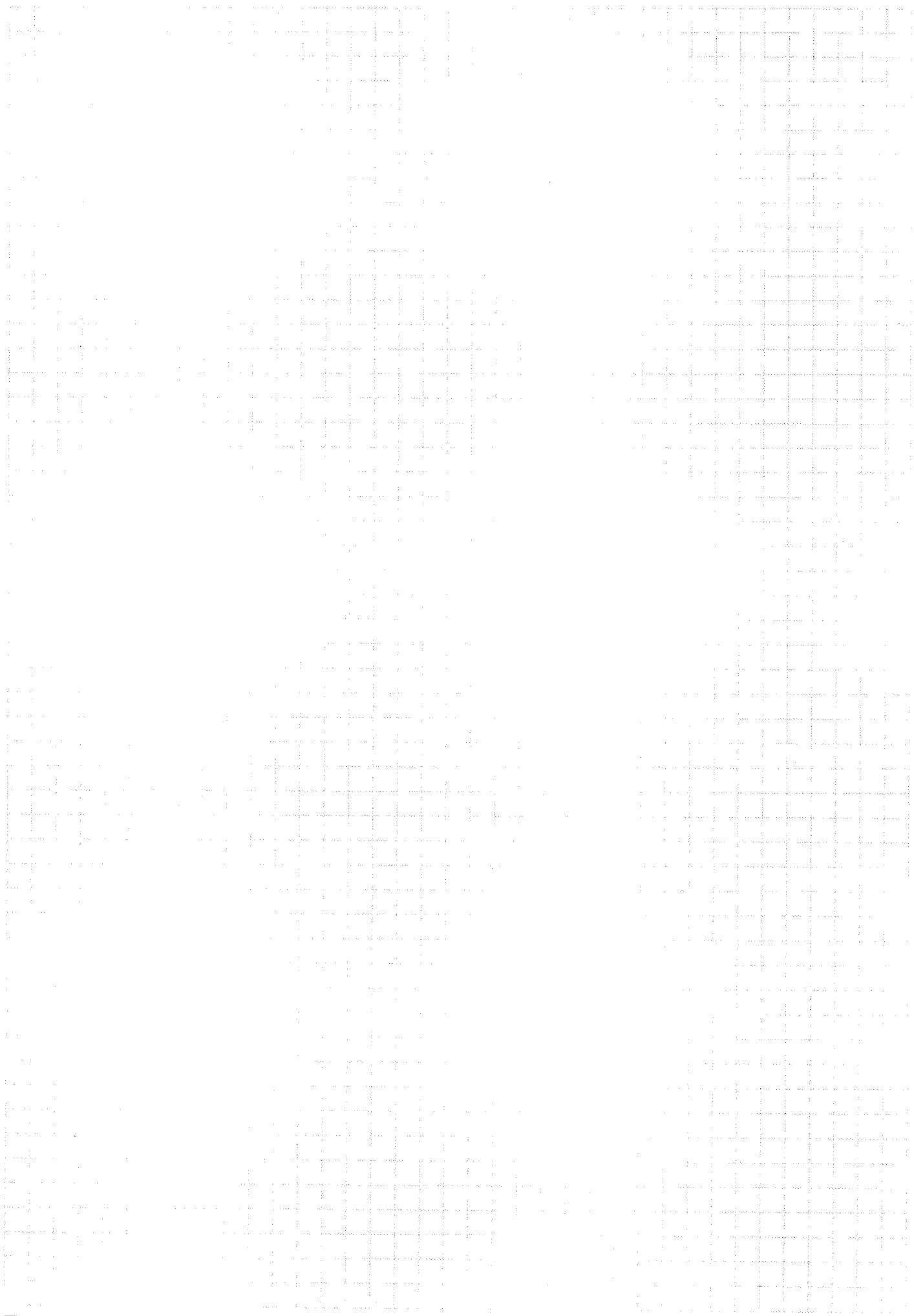
56, 57, 58, 59, 60.

Четвертое множество:

76, 77, 78, 79, 80.

Сумма = 685

Ответ: 685



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = 700 - 21y$$

$$x = 700 - 336$$

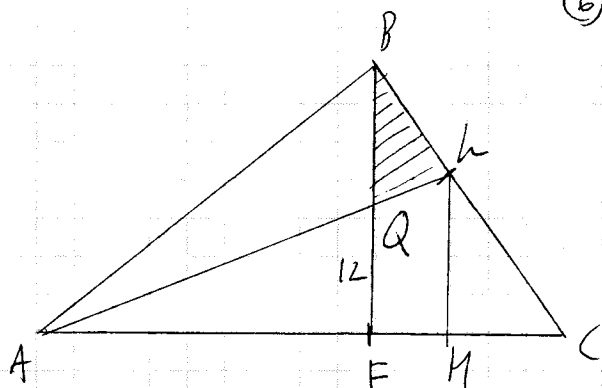
$$x = 364$$

Ответ: 364

$$y = 16$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ - 336 \\ \hline 364 \end{array}$$

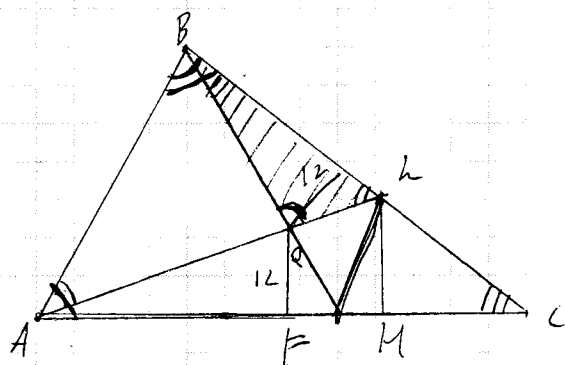
$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 16 \\ \hline 126 \\ 21 \\ \hline 336 \end{array}$$



$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$$

h M-?

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{4}{25}$$



①

$$|4x - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$x \geq 1$$

любо

или

$$1 \leq x \leq 5$$

$$|5a - 3a| \leq \sqrt{5-1}$$

любо

$$|5a - 3a| \leq 4$$

$$1 \leq x < 5$$

Если $a > 0$

$$5a - 3a \leq 4$$

$$2a \leq 4$$

$$a \leq 2$$

Если $a < 0$

$$\cancel{5a - 3a \leq 4}$$

$$\cancel{2a \leq 4}$$

$$-(5a - 3a) \leq 4$$

$$-5a + 3a \leq 4$$

$$-2a \leq 4$$

$$-a \leq 2$$

$$a \geq -2$$

со значением 1

$$|x - 3| \leq \sqrt{x-1}$$

$$|5 - 3| \leq \sqrt{5-1}$$

$$2 \leq 4$$

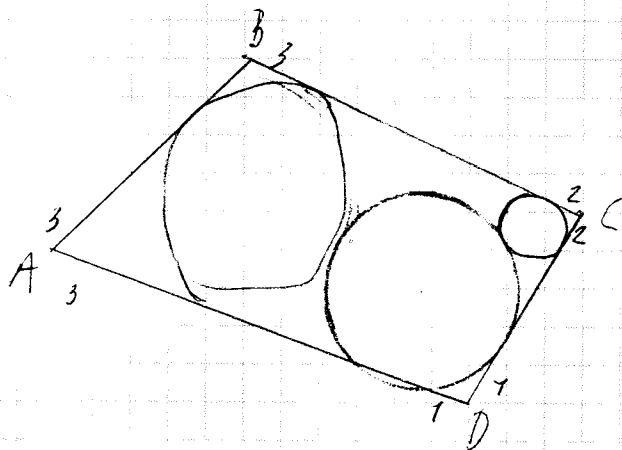
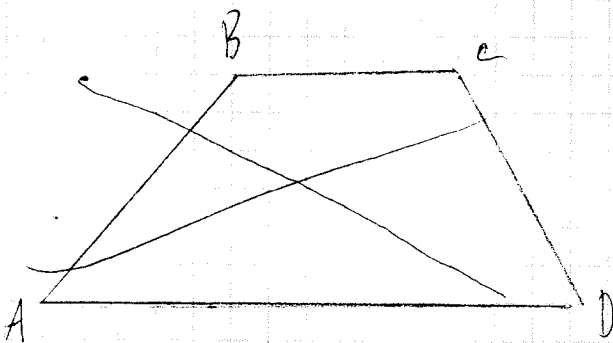
со значением 3

$$|3x - 9| \leq \sqrt{x-1}$$

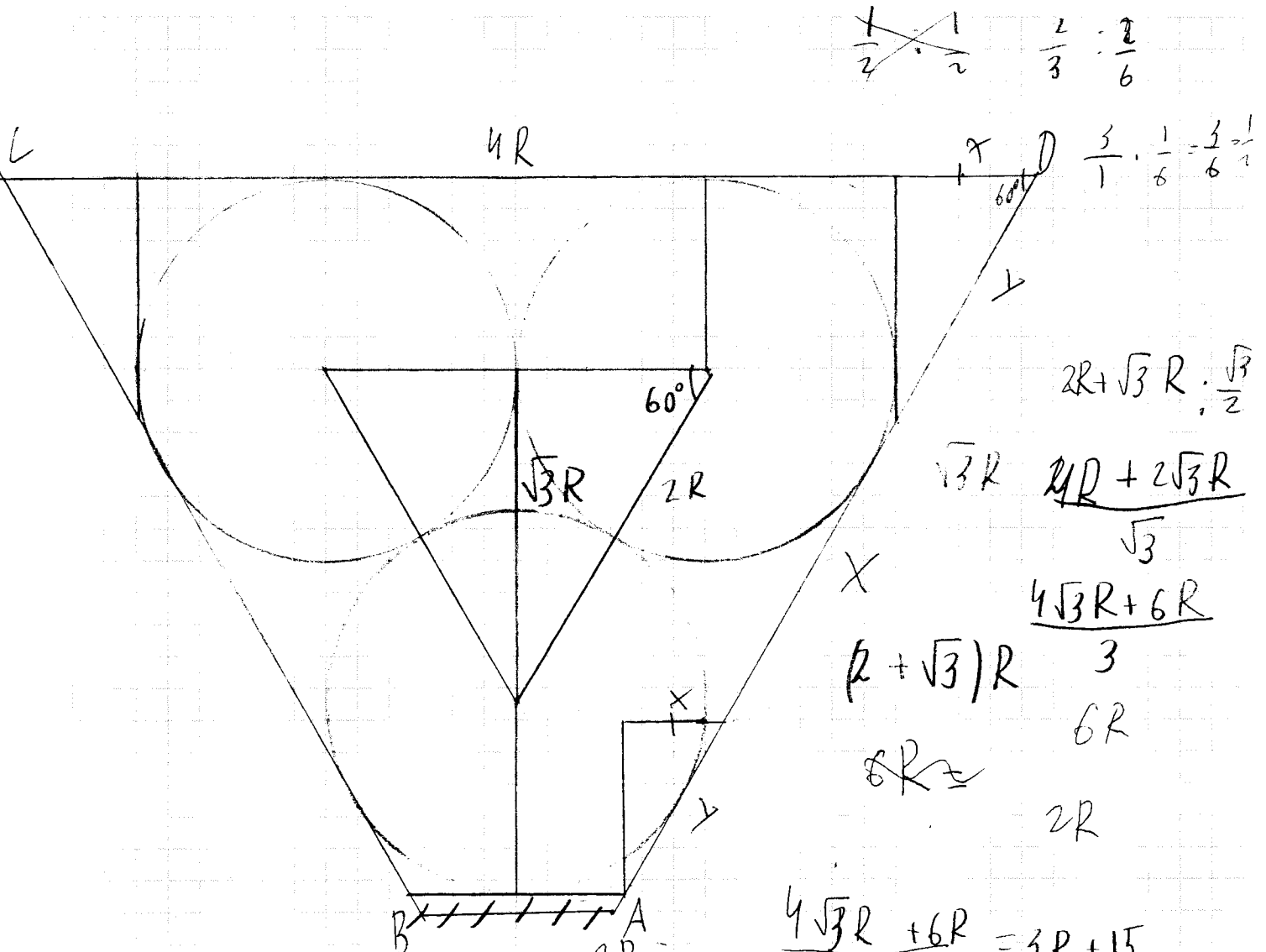
$$|15 - 9| \leq \sqrt{5-1}$$

$$\cancel{6 \leq 4}$$

②



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AD + BC - AB - CD = 30 \quad AB + CD = AD + BC + 30$$

$$2AD - AB \quad AB + CD = AB$$

$$2AD - 2R + 2x - 4R - 2x = 30$$

$$2AD - 6R = 30 \quad 6R + 30 - 6R = 30 \quad \sqrt{3}(4R + 5R) = 15$$

$$2AD = 6R + 30 \quad \frac{15}{4\sqrt{3}} - 5 \quad \frac{15}{4\sqrt{3} - 3} \quad R(4\sqrt{3} - 3) = 15$$

$$AD = 3R + 15 \quad \frac{15\sqrt{3}}{4} - 5 = \frac{15\sqrt{3} - 20}{4}$$

$$|x-3| \leq \sqrt{x-1}$$

$$\begin{aligned} x &\geq 1 \\ 2 &\leq 0 \end{aligned}$$

| | |
|----|---------------------|
| 1 | () () () () () |
| 2 | () () () () () |
| 3 | () () () () () |
| 4 | () () () () () |
| 5 | () () () () () |
| 6 | () () () () () |
| 7 | () () () () () |
| 8 | () () () () () |
| 9 | () () () () () |
| 10 | () () () () () |
| 11 | () () () () () |
| 12 | () () () () () |

~~1 2 3 4 5~~
2

~~1 2 3 4 5~~
26

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 |

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $y = 147$
 $147 = 3x^2$
 $x^2 = 49$
 $x = \pm 7$

$$\begin{array}{r} 147 \div 3 \\ \underline{12} \\ 27 \\ \underline{21} \\ 49 \\ \underline{42} \\ 7 \\ \underline{7} \\ 0 \end{array}$$

Отрезок - 14

При $y = 75$
 $75 = 3x^2$
 $x^2 = 25$
 $x = \pm 5$

Отрезок - 10
 6 вариантов

1 Вариант: ~~$a^2 + b^2 + c^2$~~ $a^2 + b^2 - c^2 = 0$
 $a = 14$ $14^2 + 10^2 - c^2 = 0$
 $b = 10$ $196 + 100 - c^2 = 0$
 $c^2 = 296$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \\ - 296 \div 4 \\ \hline 28 \overline{) 74} \\ \underline{16} \\ 34 \\ \underline{28} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

$\sqrt{296} = 2\sqrt{74}$

2 Вариант:
 $a = 14$ $14^2 + b^2 - 10^2 = 0$
 $c = 10$ $b^2 = -196 + 100$
 $b^2 = -96$

$$\begin{array}{r} 96 \div 4 \\ \hline 8 \overline{) 24} \\ \underline{16} \\ 8 \\ \underline{8} \\ 0 \end{array}$$

3 Вариант
 $c = 14$ $10^2 + b^2 - 14^2 = 0$
 $a = 10$ $b^2 = 96$
 $\sqrt{96} = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} 4\sqrt{6} \quad x &= 2\sqrt{6} \quad \text{или} -2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{74} \quad x &= \sqrt{74} \quad \text{или} -\sqrt{74} \end{aligned}$$

$$1) y = 3(2\sqrt{6})^2 = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$$

$$2) y = 3(\sqrt{74})^2 = 222$$

Ответ: 222 или 72

(Потом Проверяю все варианты)

3

x - количество марок

y - листы в альбоме

$$\begin{cases} \frac{x}{22} > y & (1) \\ \frac{x}{26} < y - 1 & (2) \\ x + 21y = 700 & (3) \end{cases}$$

$$1) \frac{x}{22} > y \quad x > 22y$$

$$2) \frac{x}{26} < y - 1 \quad x < 26y - 26$$

$$3) x + 21y = 700$$

$$x = 700 - 21y$$

$$x = 700 - 21y$$

$$\begin{array}{r} \times 700 \\ 22 \\ \hline 1400 \\ 1400 \\ \hline 15400 \end{array}$$

$$7. \frac{700}{43}$$

$$\begin{array}{r} 700 \overline{) 43} \\ \underline{43} \\ 270 \\ \underline{258} \\ 120 \\ \underline{86} \\ 340 \\ \underline{301} \\ 39 \end{array}$$

$$x > 15,4$$

$$700 - 21y > 22y$$

$$700 > 43y$$

$$43y < 700$$

$$y < 16,2$$

$$\begin{array}{r} 726 \overline{) 47} \\ \underline{47} \\ 256 \\ \underline{235} \\ 210 \\ \underline{188} \\ 22 \end{array}$$

$$700 - 21y < 26y - 26$$

$$726 < 47y$$

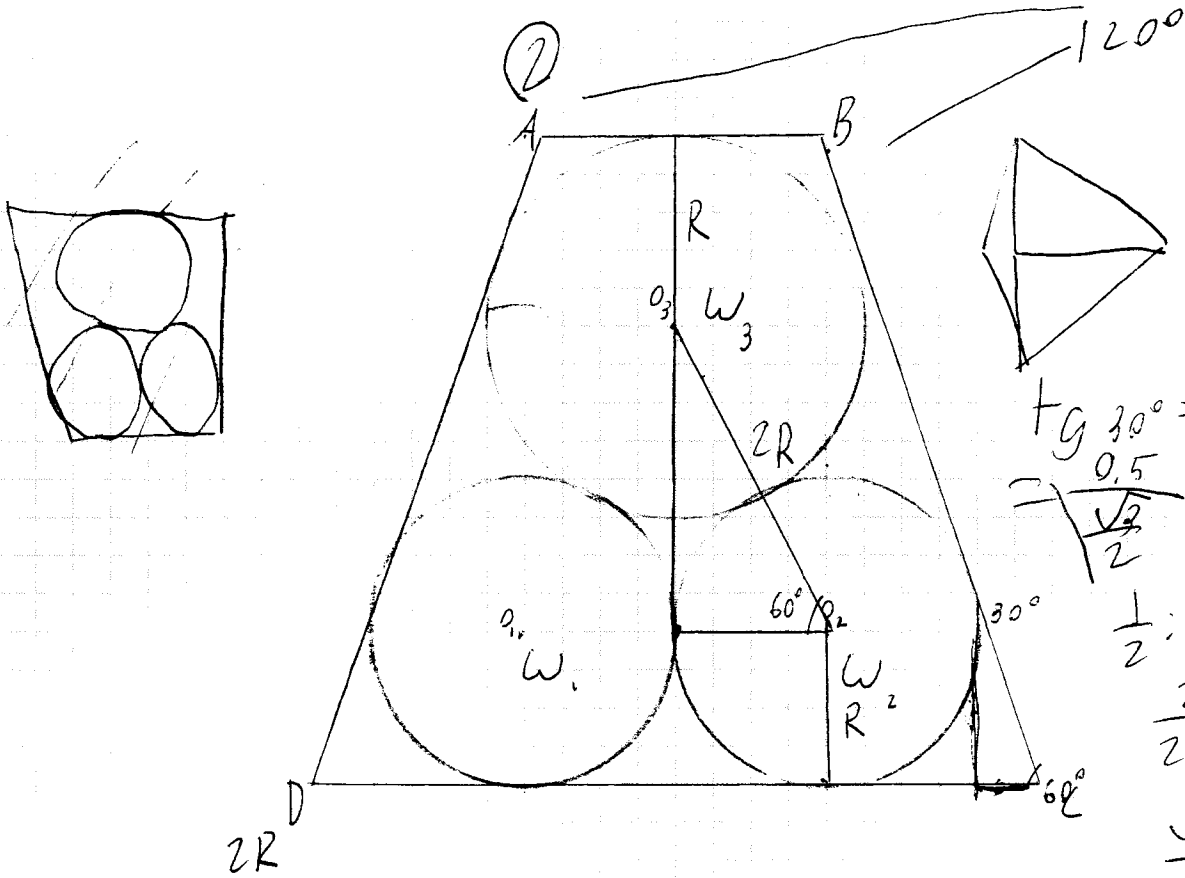
$$47y > 726$$

$$y > 15,4$$

$$15,4 < y < 16,2$$

$$y \in \mathbb{N} \Rightarrow y = 16$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \\ &= \frac{0,5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$AD + BC - AB - CD = 30$$

~~$AD + BC = AB + CD$~~ \Rightarrow можно вписать

окр.

$2AD$

$2R + \sqrt{3}R$ - высота

$$\frac{\sqrt{3}R}{3}$$

$$\frac{3R + \sqrt{3}R}{3}$$

$$R + \frac{\sqrt{3}R}{3}$$

$$\begin{aligned} 4R^2 + 2\sqrt{3}R^2 + 3R^2 &= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ 9R^2 + 6\sqrt{3}R^2 + 3R^2 &= \end{aligned}$$

~~$$\sqrt{4R^2}$$~~

$$\sqrt{4R^2 + 4\sqrt{3}R^2 + 3R^2 + R^2 + \frac{2\sqrt{3}R^2}{3} + \frac{R^2}{3}} = 8R^2$$

Количество вариантов расположения цифры "7"

12

Пусть "2" - 1, а "5" - 0 тогда

||||| - макс число комбинаций

Переводим в десятичную

$$10245122561286432168421 = 2048 - 1 = 2047$$

Убираем варианты 5555555555 и 2222222222:

$$2047 - 2 = 2045$$

и умножаем на варианты с цифрой 7

$$\begin{array}{r} \times 2045 \\ 12 \\ \hline 4090 \\ 2045 \\ \hline 24540 \end{array}$$

Ответ: 24540

(7)

[1; 25] [26; 50] [51; 75] [76; 100]

~~1 2 3 4 5~~

21 22 23 24 25

36 37 38 39 40

56 57 58 59 60

76 77 78 79 80

169 173 177 181 185

$$\begin{array}{c} \underbrace{\hspace{10em}} \\ 250 \\ 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 500 \\ + 185 \\ \hline 685 \end{array}$$

Ответ: 685