МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР 14-С 18

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.

3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-3}$ является отрезок длины 2?

5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14 С12

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$161 \cdot 22 = 3542$

$17n - 85 = x$ $n = 161$

$22n = x - 900$

$5x^2 = 125$

$x^2 = 25$

$x = -5$ $y = 6$

$5x^2 = 80$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

$\begin{cases} 15n < x \\ 17(n-5) = x \\ 22n = x - 900 \end{cases}$

$4334 - 900 = 3434$

$17n - 22n - 85 = x - x + 900$

$-5n = 985$

$n = 197$

$985 : 5 = 197$

$197 \cdot 22 = 4334$

$x = 17 \cdot 192$

$x = 3264$

$17 \cdot 192 = x$

$192 \cdot 17 = 3264$

№5. Пусть n – кол-во страниц.

x – кол-во стр.

$15n < x$ $17n = 17n - 1 = x$

$22n = x - 900$

$15n < x$.

$17n - 2$ $17(n-5) = 22n + 900$

$-5n = 985$

$n = 197$

$n \leq 18$

№1. Т.к. парабола высекает на каждой из прямых отрезки, она должна иметь 2 точки пересечения с прямой.

$y=5x^2$ $\quad y=125.$

т.к. графики имеют точки пересечения приравняем правые части.

$5x^2=125$

$x^2=\frac{125}{5}$

$x^2=25$

$x=5 \quad x=-5$

Длина отрезка 1 (стороны треугольника l_1) $=5-(-5)=10$

$5x^2=80$

$x^2=16$

$x=4 \quad x=-4$

Длина отрезка 2 (стороны треугольника $-l_2$) $=4-(-4)=8$.

~~т.к.~~ $5x^2=a$, т.к. 2 точки пересечения $a>0$.

$x^2=\frac{a}{5}$

$x=\sqrt{\frac{a}{5}} \quad x=-\sqrt{\frac{a}{5}}$

Длина отрезка 3 (стороны треугольника длины l_3). $\sqrt{\frac{a}{5}}-(-\sqrt{\frac{a}{5}})=2\sqrt{\frac{a}{5}}$

т.к. треугольник прямоугольный должно выполняться ~~равенство~~. l_1^2+l теорема Пифагора.

1 случай. $l_1^2+l_2^2=(2\sqrt{\frac{a}{5}})^2$ l_3

$10^2+8^2=4\frac{a}{5}$

$164=\frac{4a}{5}$

$4a=820$

$a=205$

2 случай.

$l_2^2+l_3^2=l_1^2$

$8^2+(2\sqrt{\frac{a}{5}})^2=10^2$

$4\frac{a}{5}=36$

$\frac{4a}{5}=36$

$4a=$

$36\cdot5=180$

$l_3^2+l_1^2=l_2^2$

$\frac{4a}{5}+10^2=8^2$

$\frac{4a}{5}=-36$

Ответ: 205; 45.

$17(n-2)=x$

$17n-34=x$

$15\cdot15$

$197\cdot15=2955$

$22\cdot197=4334$

$4334-900=3434$

$17\cdot192=3264$

3264

$164\cdot5=820$

$820:4=205$

$180:4=45$

~~$36\cdot5$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-С18

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 $|ax-a| \le \sqrt{x-3}$ $\Big|^2$ $x \ge 3$.

$|ax-a| \ge 0$ $x=$

при $x \ge 3$ $x_1+x_2=$

$|ax-a|^2 \le (\sqrt{x-3})^2$

$(ax-a)^2 \le x-3$

$a^2x^2-2a^2x+a^2 \le x-3$

$a^2x^2-2a^2x-x+a^2+3 \le 0$

$a^2x^2+x(-1-2a^2)+a^2+3 \le 0$

$D=(1+2a^2)^2-4(a^2+3)\cdot a^2 = 1+4a^2+4a^4-4a^4-12a^2 =$

$=1-8a^2$

$1-8a^2>0$

$-8a^2>-1$

$a^2<\frac{1}{8}$

$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}; +\infty\right)$

$x_1=\frac{1+2a^2+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$

$n=26$

$|x_1-x_2|=2$

$\left|\frac{1+2a^2+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}-\frac{1+2a^2-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}\right|=2 \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{1-8a^2}\ge 0\\ a^2>0\end{cases}$

$\left|\frac{2\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}\right|=2$ $\qquad \frac{550}{17}<35$

$\frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2}>0$

$\left|\frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2}\right|=2$ $\qquad \left|\frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2}\right|=\frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2}$

$n<14(380-29n)$

$n-14\cdot(380-29n)>0$

$n-15300-380n<0$

$n<24$

☑ черновик ☑ чистовик

Страница №5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\left|\sqrt{\frac{1-8a^2}{4a^2}}\right| = 2$

№3. $15n < x$

$\sqrt{\frac{1-8a^2}{4a^2}} = 2$

$[1; 40]$

$x - y \,\vdots\, 4$

$\left(\frac{\sqrt{1-8a^2}}{(4a^2)}\right)^2 = 4^2$

$15n < x$

$22n = 900$

$\frac{1-8a^2}{4a^4} = 16$

$4t^2 + 8t - 1 = 0$

Пусть $a^2 = t$.

$D = 64 + 16 = 80$

$\frac{1-8t}{4t^2} = 16$

$\begin{cases} 22n + x = 900 \\ \frac{x}{17} < n \\ 15n < x \end{cases}$

$t = \frac{-8 \pm \sqrt{80}}{4}$

$1 - 8t = 64t^2$

$64t^2 + 8t - 1 = 0$

$D = 64 + 256 =$

$\frac{-8 + 4\sqrt{5}}{16} = \frac{-2 + \sqrt{5}}{4}$

$\frac{900}{22} = 41$

$\begin{cases} 22n + x = 900 \\ \frac{x}{17} < n \\ 15n < x \end{cases}$

$4a^4 = 1 - 8a^2$

$4a^4 + 8a^2 - 1 = 0$

$a^2 = t$

$4t^2 + 8t - 1 = 0$

$1 - 8t = 4t^2$

$4t^2 + 8t - 1 = 0$

$x = \frac{900}{22n}$

$D = 64 + 16 =$

$D = 64 + 16 = 80$

$n = 41$

$|ax - a|^2 \le x - 3$

$15 \cdot 41 < x$

$17 \cdot$

$(ax)^2 - 2a \cdot a \cdot x + a^2 - x + 3 \le 0$

$a^2x^2 - 2a^2x - x + a^2 + 3 \le 0$

$D = (2a^2+1)^2 - 4a^2(a^2+3) = 4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^4 - 12a^2 = 1 - 8a^2$

$\frac{697}{n} < n$

$22n = 900$

$15n < \frac{900}{22n}$

$x_1 = \frac{2a^2 + 1 + \sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$

615

$n < \frac{41}{5n}$

$\frac{-2a^2 - 1 - \sqrt{1-8a^2} + 2a^2 + 1 - \sqrt{1-8a^2}}{2a^2} = 2$

$\frac{697}{n} < n \quad \frac{41}{5n} > n > \frac{697}{n}$

$\frac{2\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$

$\sqrt{1-8a^2} = 2a^2$

$n < \frac{41}{5n} \quad \frac{41}{5} > n^2 > 697$

$1 - 8a^2 = 4a^4$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-018

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 15n < x \\ 19(n-2) = x \\ 22n = x - 966 \\ z \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\cancel{22}n = \frac{\cancel{x - 966}}{9}$$

$x = 22n + 966$

$17(n-2) = 22n + 966$

$15n < x$

$17n - 112 = 22n + 966$ [illegible]

$-5n = 966 + 112$

$n = \frac{966 + 112}{-5}$

$z = 2$.

$17n - 34 = x$

$22n = x + \cancel{88n}$, $x - 966$

$22n = 17n - 34 - 966$

$5n = -934$

$n < 0$

$z = 3$.

$17(n-3) = x$

$17n - 51 = x$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 3 \\ \hline 51 \end{array}$$

$\cancel{22}n = x - 51$

$22n = 17n - 51 - 966$

$5n = -1017$

$|ax - a| \leq \sqrt{x-3}$ $(x \geq 3)$

$|a(x-1)| \leq \sqrt{x-3}$

$\vee\!/\quad\quad\quad\vee\!/$

$0\quad\quad\quad\quad 0$

$(a(x-1))^2 \leq (x-3)^2$

$(a(x-1))^2 - (x-3)^2 \leq 0$

$(a(x-1) - (x-3))(a(x-1) + (x-3)) \leq 0$

$(ax - a - x + 3)(ax - a + x - 3) \leq 0$

$a^2x^2 -$

$2 \cdot 3 \cdot 6 =$

$(ax - a)^2 - (x-3)^2 \leq 0$

$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - x^2 + 6x - 9 \leq 0$

$x^2(a^2 - 1) + x(6 - 2a^2) + a^2 - 9 \leq 0$

$D = (6 - 2a)^2 - 4(a-1)(a^2-9) = 36 - 24a + 4a^2 - 4(a^3 - 9a - a^2 + 9)$ [illegible]

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$= \cancel{36} - 144a + 4a^2 - 4a^3 + 38a + 4a^3 - \cancel{36} = 4a^3 + 8a^2 - 24a$

т.к. должен быть отрезок н-во должно иметь 2 ~~решен~~

$4a^3 + 8a^2 - 24a > 0$

$4a(a^2 + 2a - 6) > 0 \qquad a^2 + 2a - 6 = 0$

$D = 4 + 24 = 28$

$a = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -1 \pm \sqrt{7} \approx 5{,}76$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-1-\sqrt{7} \qquad 0 \qquad -1+\sqrt{7}$

$a_2 = -1 - \sqrt{7} \approx -4{,}76$

$a \in (-1-\sqrt{7}; 0); (-1+\sqrt{7}; +\infty)$

$x_1 = \frac{-(6-2a) + \sqrt{4a^3 + 8a^2 - 24a}}{2(a-1)} = \frac{-6 + 2a + 2\sqrt{a(a^2+2a-6)}}{2(a-1)} =$

$= \frac{2(a - 3 + \sqrt{a(a^2+2a-6)})}{2(a-1)} = \frac{a - 3 + \sqrt{a(a^2+2a-6)}}{(a-1)}$

$x_2 = \frac{a - 3 - \sqrt{a(a^2+2a-6)}}{(a-1)}$

5 3.

$\left| \frac{a - 3 + \sqrt{a(a^2+2a-6)}}{(a-1)} - \frac{a - 3 - \sqrt{a(a^2+2a-6)}}{(a-1)} \right| = 2$

$\left| \frac{a - 3 + \sqrt{a(a^2+2a-6)} - a + 3 + \sqrt{a(a^2+2a-6)}}{a-1} \right| = 2$

$\frac{2\sqrt{a(a^2+2a-6)}}{a-1} = 2$

$\left| \frac{2\sqrt{a(a^2+2a-6)}}{a-1} \right| = 2$

$\frac{4(a(a^2+2a-6))}{(a-1)^2} = 4 \quad | : 4$

$\frac{a(a^2+2a-6)}{(a-1)^2} = 1 \qquad a \neq 1$

$a(a^2+2a-6) = (a-1)^2$

$a^3 + 2a^2 - 6a = a^2 - 2a + 1$

$a^3 + a^2 - 4a - 1 = 0$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

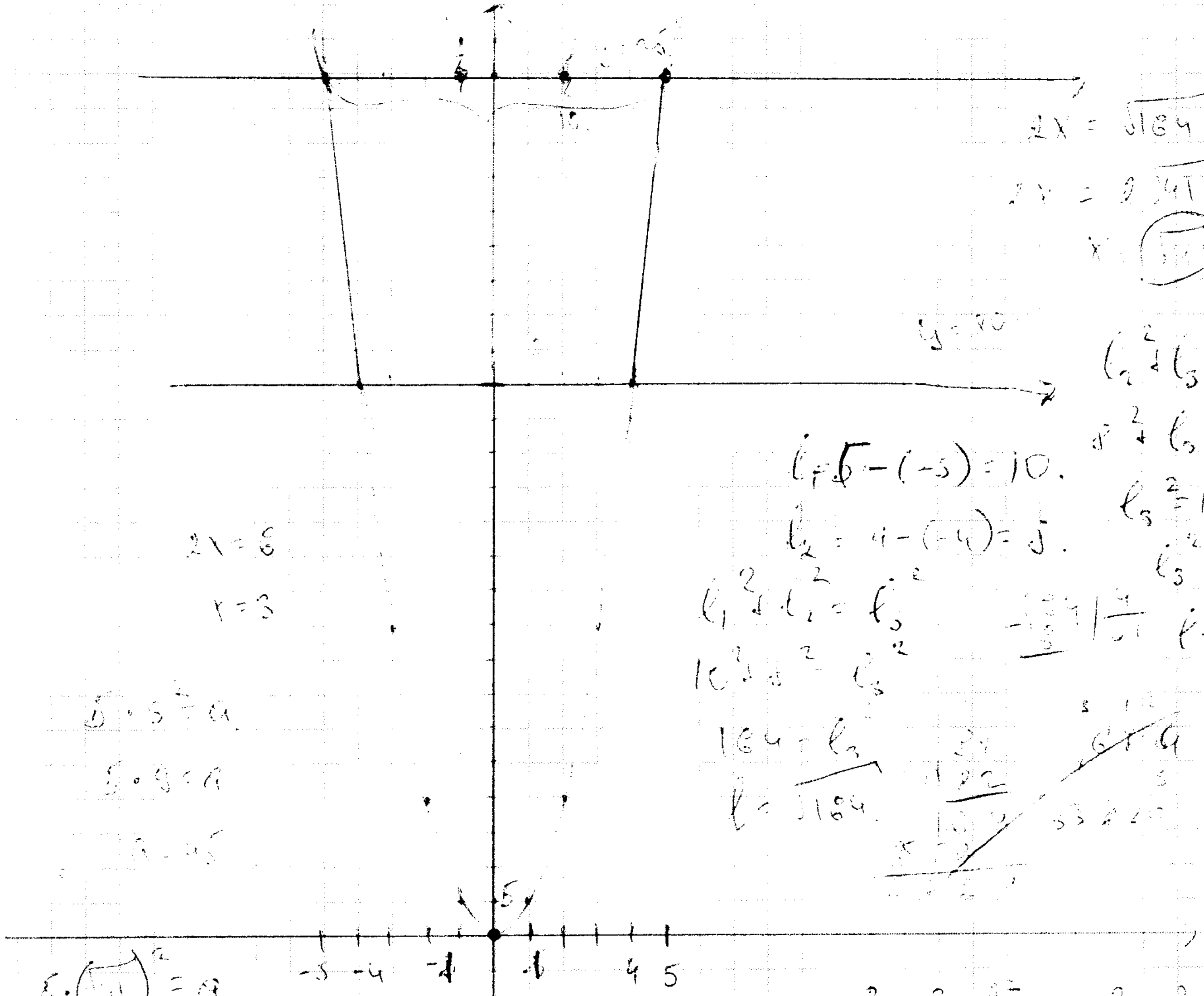
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-C18

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2x = \sqrt{164}$

$2x = 2\sqrt{41}$

$x = \sqrt{41}$

$l_2^2 + l_3^2 = l_1^2$

$8^2 + l_3^2 = 10^2$

$l_3^2 = 100 - 64$

$l_3^2 = 36$

$l = 6$

$l_1 = 5 - (-5) = 10.$

$l_2 = 4 - (-4) = 8.$

$l_1^2 + l_2^2 = l_3^2$

$10^2 + 8^2 = l_3^2$

$164 = l_3$

$l = \sqrt{164}.$

$2x = 6$

$x = 3$

$5 \cdot 3^2 = a$

$5 \cdot 9 = a$

$a = 45$

$5 \cdot (\sqrt{41})^2 = a$

$5 \cdot 41 = 205 \quad a = 205.$

$5x^2 = a$

$10^2 + 8^2 = l^2 \qquad 10^2 = 8^2 + l^2$

$l^2 = 10^2 - 8^2$

$l = 100 - 64$

$l_1 = 5 - (-5) = 10 \qquad 10^2 + 8^2 = 164 \quad l = 36$

$l_2 = 4 - (-4) = 8$

$2x = l$

$2x = 36$

$x = 18$

$x = \sqrt{82}$

x – все марки ...
n – кол-во ...

$$\begin{cases} 15n < x \\ 17(n-1) = x \\ 22n = x - 900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15n < x \\ 17(n-5) = x \\ 22n = x - 900 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 17n - 85 = x \\ 22n = x - 900 \end{cases}$$

$-5n - 85 = +900$

$-5n = 985$

$n = 197$

$x = 22 \cdot 197 + 900$

$x = 4334 + 900 = 5234$

$17 \cdot 192 = 5\cancel{23}$

$17n - 17 = x$

$22n = 17n - 17 - 900$

$$\begin{cases} 17n - 17 = x \\ 22n = x - 900 \end{cases}$$

$-5n - 17 = 900$

$-5n = 917$

$n = 183$

$5n = 85$

$n = 17$

$17 \cdot (17 - 1) = x$

$17 \cdot 16 = x$

$$-\begin{cases} 17(n-5) = x \\ 22n = x - 900 \end{cases}$$

$x = 17(197 - 1)$

$x = 17 \cdot 196$

$x = 3332$

$$-\begin{cases} 17n - 85 = x \\ 22n = x - 900 \end{cases}$$

$-5n - 85 = +900$

$-5n = 985$

$n = 197$

$x = 5234$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-018

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 $|ax-a| \le \sqrt{x-3}$ $|\wedge 2$ ОДЗ $x \ge 3$

$|ax-a| \ge 0$ $\sqrt{x-3} \ge 0$

при $x \in R$; $a \in R$ при $x \in [3; +\infty)$

$|ax-a|^2 \le (\sqrt{x-3})^2$

$(ax-a)^2 \le x-3$

$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \le x-3$

$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - x + 3 \le 0$

$a^2x^2 + x(-1-2a^2) + a^2 + 3 \le 0$

$D = (1+2a^2)^2 - 4a^2(a^2+3) = 1+4a^2+4a^4 - 4a^4 - 12a^2 = 1-8a^2$

$1-8a^2 > 0$

$-8a^2 > -1$

$a^2 < \frac{1}{8}$

$a \in (-\infty; -\frac{1}{2\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{2\sqrt{2}}; +\infty)$

$x_1 = \frac{1+2a^2+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$ $x_2 = \frac{1+2a^2-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$

$|x_1 - x_2| = 2$

$\left|\frac{1+2a^2+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2} - \frac{1+2a^2-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}\right| = 2$

$\left|\frac{\cancel{2}\sqrt{1-8a^2}}{\cancel{2}a^2}\right| = 2$ $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-8a^2} \ge 0 \\ a^2 > 0 \end{cases}$

$\left|\frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2}\right| = 2$ $\frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2} \ge 0 \Leftarrow \left|\frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2}\right| = \frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2}$

$\frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2} = 2$ $|\wedge 2$

$\left|\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}\,x - \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}\right| \le \sqrt{x-3}$

$\left|\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}\,(x-1)\right| \le \sqrt{x-3}$ $|\wedge 2$

$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)(x-1)^2 \le x-3$

$(x^2-2x+1)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right) \le x-3$

$\frac{\sqrt{5}}{2}x^2 - \sqrt{5}x + \frac{\sqrt{5}}{2} - x^2 + 2x - 1 \le x-3$

$\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{2-\sqrt{5}}{2}x^2 + (1-\sqrt{5})x + 2 - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{\sqrt{5}}{2}$

$D = (1-\sqrt{5})^2 - 4\cdot\left(2-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$\frac{64}{16}$ $\frac{4}{24}$ $-\frac{24}{0}$ $\frac{81}{16}$

☑ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{1-8a^2}{a^4} = 4$

$1-8a^2 = 4a^4$

$4a^4+8a^2-1=0$

$a^2 = t,\ t>0$

$4t^2+8t-1=0$

$D = 64+16 = 80 = (4\sqrt5)^2$

$t_1 = \frac{-8+\sqrt{80}}{8} = \frac{-8+4\sqrt5}{8} = \frac{-2+\sqrt5}{2}$

$t_2 = \frac{-2-\sqrt5}{2} < 0$ не подх.

$a^2 = \frac{-2+\sqrt5}{2}$

$a = \sqrt{\frac{-2+\sqrt5}{2}}$ $\qquad a = -\sqrt{\frac{-2+\sqrt5}{2}}$

$-\sqrt{\frac{-2+\sqrt5}{2}} < -\frac{1}{2\sqrt2} \mid \cdot(-1)$ $\qquad \sqrt{\frac{-2+\sqrt5}{2}} > -\frac{1}{2\sqrt2}$

$\sqrt{\frac{-2+\sqrt5}{2}} > \frac{1}{2\sqrt2} \mid ^2$ $\qquad \frac{-2+\sqrt5}{2} > \frac{1}{8}$

$\frac{-2+\sqrt5}{2} > \frac{1}{8} \mid \cdot 8$

$4(-2+\sqrt5) > 8$

$-8+4\sqrt5 > 8$

$4\sqrt5 > 16 \mid :4$

$\sqrt5 > 4$

$\varnothing$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-018

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 $|ax-a| \le \sqrt{x-3} \quad |^2$ ОДЗ: $x \ge 3$

$|ax-a|^2 \le (\sqrt{x-3})^2$

$(ax-a)^2 \le x-3$

$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \le x-3$

$a^2x^2 - 2a^2x - x + a^2 + 3 \le 0$

$a^2x^2 - x(2a^2+1) + a^2 + 3 \le 0$

$D = (2a^2+1)^2 - 4a^2(a^2+3) = 4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^4 - 12a^2 = 1 - 8a^2$

$1 - 8a^2 > 0$

$-8a^2 > -1$

$a^2 < \frac{1}{8}$

$a \in \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

$x_1 = \frac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$ $x_2 = \frac{2a^2+1-\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}$

$|x_1 - x_2| = 2$

$\left|\frac{2a^2+1+\sqrt{1-8a^2} - 2a^2 - 1 + \sqrt{1-8a^2}}{2a^2}\right| = 2$

$\left|\frac{2\sqrt{1-8a^2}}{2a^2}\right| = 2$

$\left|\frac{\sqrt{1-8a^2}}{a^2}\right| = 2 \quad |^2$

$\frac{1-8a^2}{a^4} = 4$

$1 - 8a^2 = 4a^4$

$a^2 = t, \ t > 0$

$4t^2 + 8t - 1 = 0$

$D = 64 + 16 = 80$

$t_1 = \frac{-8+\sqrt{80}}{8} = \frac{-8+4\sqrt{5}}{8} = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}$ $t_2 = \frac{-2-\sqrt{5}}{2} < 0$, но $t > 0$.

$a^2 = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$a^2 = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1$

$a_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1}$ $\qquad$ $a_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1}$

$\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1} < \frac{1}{[illegible]}$ $\qquad$ $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1} > -\frac{1}{[illegible]} \mid \cdot (-1)$

$\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 < \frac{1}{[illegible]}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1} < \frac{1}{[illegible]}$

$\frac{\sqrt{5}}{2} < 1\frac{1}{[illegible]}$ $\qquad$ верно $\Rightarrow$ $a = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1}$ подходит

$\frac{\sqrt{5}}{2} < \frac{[illegible]}{[illegible]}$

$\frac{5}{[illegible]} < \frac{81}{[illegible]} \mid \cdot [illegible]$

$5 < \frac{81}{16}$

$5 < 5\frac{1}{16}$ верно $\Rightarrow$ $a = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1}$ подходит.

Ответ: $a = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1}$

№5. [illegible] $3^{[illegible]} - 6$ [illegible]

1.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-018
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 n - кол-во страниц

x - кол-во марок

$$\begin{cases} 15n < x \\ \frac{x}{17} < n \\ 22n = 900 + x \end{cases}$$

$x = 22n - 900$

$$\begin{cases} 15n < 22n - 900 \\ \frac{-900+22n}{17} < n \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7n < -900 \\ 22n - 900 < 17n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n > \frac{900}{7} \\ 5n < 900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n > \frac{900}{7} \\ n < 180 \end{cases}$$

$n = 140$

$x = 22 \cdot 140 - 900$

$x = 2180$

Ответ: 21

$$\begin{array}{r} \times 140 \\ 22 \\ \hline 280 \\ 280 \\ \hline 3080 \end{array} \qquad \begin{array}{r} - 3080 \\ 900 \\ \hline 2180 \end{array}$$

$$\begin{cases} 15n < x \\ \frac{x}{17} < n \\ 22n + x = 900 \end{cases}$$

$x = 900 - 22n$

$$\begin{cases} 15n < 900 - 22n \\ \frac{900-22n}{17} < n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n > \frac{900-22n}{15} \\ n < \frac{900-22n}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15n + 22n < 900 \\ 900 - 22n < 17n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 37n < 900 \\ 39n > 900 \end{cases}$$

$n = 24$

$x = -22n + 900$

$x = 372$

Сейчас у Чиполлино $372 + 900 = 1272$ марки

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Т.к. парабола высекает на каждой из прямых отрезок, она должна иметь 2 точки пересечения с прямой.

$y=5x^2 \quad y=125$

т.к. графики имеют точки пересечения приравняем правые части

$5x^2=125$

$x^2=25$

$x=5 \quad x=-5$

Длина отрезка 1 (l_1) - сторона треугольника $= 5-(-5)=10$.

$5x^2=80$

$x^2=16$

$x=4 \quad x=-4$

Длина отрезка 2 (l_2) - сторона треугольника $= 4-(-4)=8$.

$5x^2=a$, $a>0$, т.к. 2 точки пересечения

$x^2=\left(\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^2$

$x=\sqrt{\frac{a}{5}} \quad x=-\sqrt{\frac{a}{5}}$

Длина отрезка 3 (l_3) - сторона треугольника $= \sqrt{\frac{a}{5}}-\left(-\sqrt{\frac{a}{5}}\right)=2\sqrt{\frac{a}{5}}$

Т.к. треугольник прямоугольный, должна выполняться теорема Пифагора.

1 случай: $l_1^2+l_2^2=l_3^2$

$10^2+8^2=\left(2\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^2$

$\frac{4a}{5}=164$

2 случай: $l_2^2+l_3^2=l_1^2$

$8^2+\left(2\sqrt{\frac{a}{5}}\right)^2=10^2$

$\frac{4a}{5}=36$

3 случай: $l_3^2+l_1^2=l_2^2$

$\varnothing$

$4a = 820$ $\qquad$ $4a = 180$

$a = 205$ $\qquad$ $a = 45$

Ответ: $a = 45; 205$

№3. Пусть n - кол-во листов,

x - кол-во марок.

$15n < x$, т.к. если он наклеит по 15 марок на лист, все не поместятся.

Зная, что клея по 17 марок на лист, хотя бы один останется пустым, составим 2 ур-ние системы. Т.к. n - целое число, то получим ур-ние $17(n-\cancel{2}) = x$, 3-е ур-ние системы

$22n = x - 900$

$$\begin{cases} 15n < x \\ 22n = x + 900 \\ 17(n-\cancel{2}) = x \end{cases} \qquad - \begin{cases} 22n = x + 900 \\ 17(n-\cancel{2}) = x \end{cases}$$

$22n - 17n - (-5) \cdot 17 = x - 900 - x$ $\qquad$ $22n = 900$

$5n - (-85) = -900$ $\qquad$ $n = 41$ - в альбоме 41 страниц.

$5n + 85 = -900$

$5n = -985$

$n = 197.$

$$\begin{cases} 15 \cdot 41 < x \\ \frac{1}{17} \cdot x < 41 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 615 \\ x < 797 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22n + x = 900 \\ 15n < x \\ \frac{x}{17} < n. \end{cases}$$

$x = 900 - 22n$

$$\begin{cases} 15n < 900 - 22n \\ \frac{900-22n}{17} < n \end{cases}$$

$\frac{900-22n}{15} > n > \frac{900-22n}{17}$ $\quad | \cdot 17 \cdot 15$

$17(900-22n) > n > (900-22n) \cdot 15$

$$\begin{cases} n - 17(900-22n) < 0 \\ n - 15(900-22n) > 0 \end{cases}$$

~~$n - 17(900-22n) - n + 17(900-22n) > 0$.~~

☑ черновик ☑ чистовик Страница № [illegible]
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)