

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР

11-011

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) 1- каше. первое число

каждым скачала первые 5 чисел

1, 27, 53, 79, 105. мы видим что числа последовательно создают арифметическую прогрессию

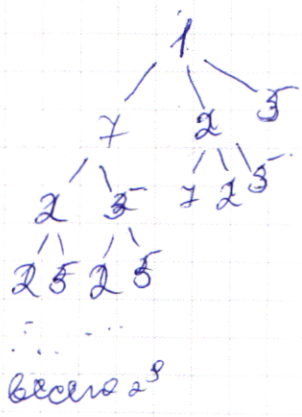
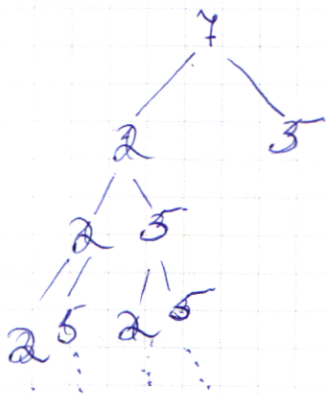
$$d = 27 - 1 = 26 \quad \text{и} \quad a_n = a_1 + (n-1)d \quad n=20 \quad a_1 = 1.$$

$$a_{20} = 1 + (20-1)26 = 1 + 19 \cdot 26 = 1 + 494 = 495. \quad \text{Используем}$$

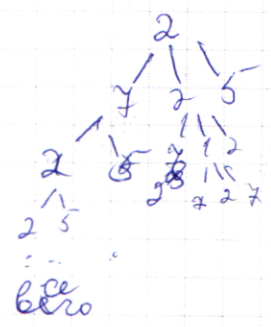
формулу для нахождения суммы арифметической прогрессии. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 495}{2} \cdot 20 = 4960$

Ответ: сумма 20 первых чисел равна 4960

5) Давайте мы возьмем восемь 7 как одну цифру 7, и к-ва цифр уменьшим на 8
19-8=11. Теперь решим эту задачу для 11
знакового числа.



для второй ветки как с 2 или 5 отдельных решений!



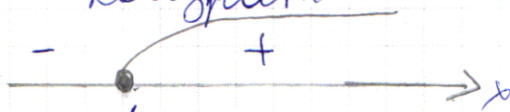
значит если 7 вна каже то всего 2^{10} вариантов

не смог решить.

4) Нам дано вот такое неравенство $|ax-3a| \leq \sqrt{x-1}$
 $\sqrt{x-1} \geq 0$ обе части уравнения возведем в

$x-1 \geq 0$ квадрат.

$x \geq 1$



мы видим что этот

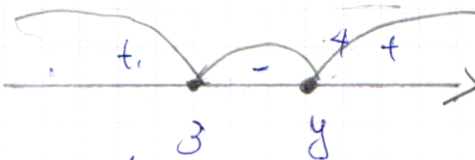
корень неравенства принадлежит $x \in [1; +\infty)$

Обе части неравенства равны когда они

равны нулю. $|ax-3a| \geq 0$ оно равно нулю когда

$|a(x-3)| \geq 0$ $a=0$ и $x=3$

$a(x-3) \leq 0$ и $a(x-3) \geq 0$ значит:



у нас у кого будет вот такой интервал. Число y это вто-

рой корень этого неравенства так как 1 и 3

не образуют отрезок длиной y . Что бы была

отрезок шириной y наша функция $a=x-y$

$(x-y)(x-3) \leq 0$.

отрезка была равна y , y должно равняться 7

$y=7$, $a=y-7$ (здесь забыть умножить почему

$y > 3$, потому что все числа больше 3

образуют отрезок длиной y а до 3 не

входят корни неравенства $\sqrt{x-1} \geq 0$)

Ответ: $a = x - 7$.

3) У нас всего 3 страницы, значит у нас два неравенства.

$21x + 26x > 700$

$21x + 22x < 700$

$47x > 700$

$43x < 700$

$x > 14 \frac{42}{47}$

$x < 16 \frac{17}{43}$

значит $x = 15$ или

$x = 16$

Решим эту задачу при $x = 15$

Продолжиме на 3 странице.

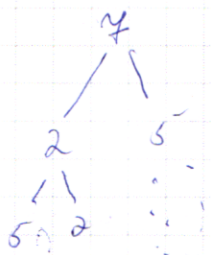
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) продолжим. $15 \cdot 21 = 315$ $700 - 315 = 385$ Ответ: 485
 этот вариант отпадает потому что $26 \cdot 15 = 390$
 это меньше чем 485.

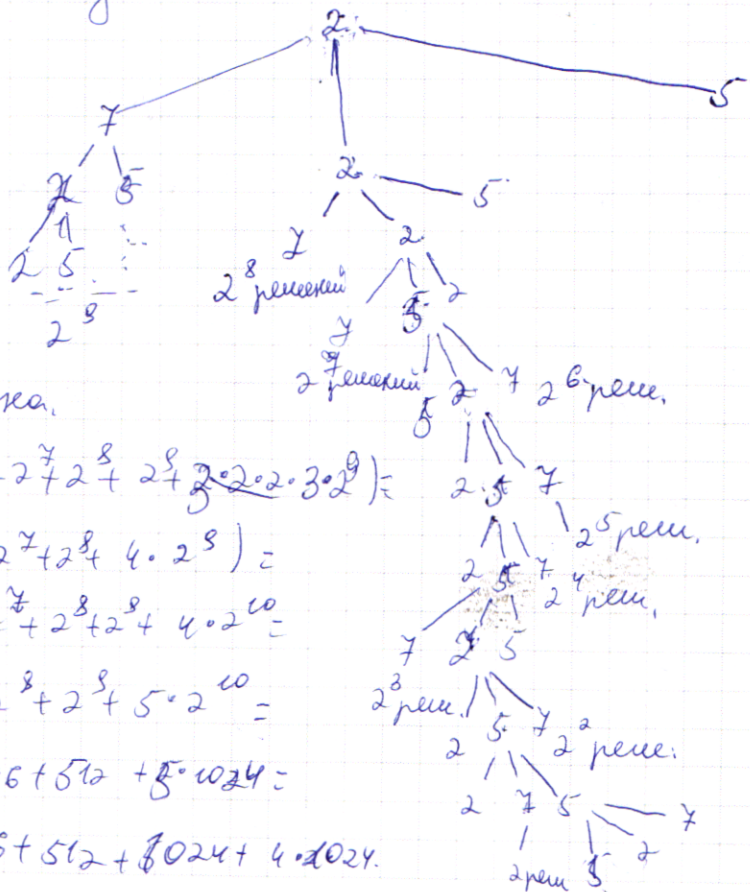
Решим задачу при $x = 16$. $16 \cdot 15 = 336$ $700 - 336 = 364$
 проверим $22 \cdot 16 = 352$ это меньше чем 364.
 $26 \cdot 16 = 416$ это больше чем 364. Ответ: 364 марк.

5) Давайте мы возьмём веселье γ как одну γ ,
 и x -ва для γ уменьшим на β , $15 - \beta = 11$. Теперь ре-
 шим задачу для 11 значного числа.

решим это же для γ
 и γ столько



всего 2^{10} решений



общая сумма равна:

$$2^{10} + 2(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^9) =$$

$$= 2^{10} + 2(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 4 \cdot 2^9) =$$

$$= 2 \cdot 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 4 \cdot 2^{10} =$$

$$= 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 5 \cdot 1024 =$$

$$= 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 256 + 512 + 5124 + 4 \cdot 1024.$$

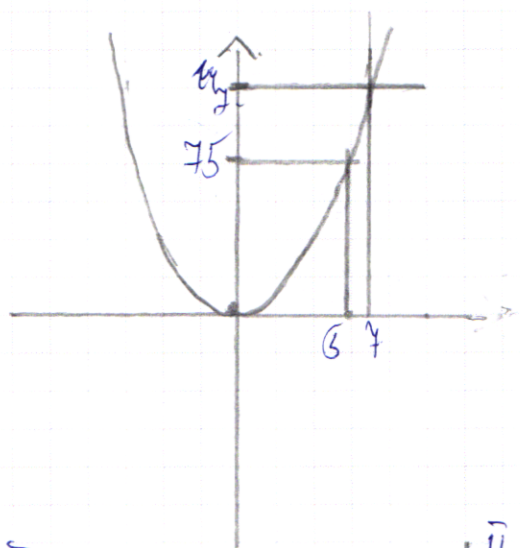
мы здесь видим геометрическую прогрессию
 q -коэффициент $q = \frac{2^2}{2^1} = 2$

$$S = \frac{2^{10} - 2^2}{1 - 2} = \frac{1024 - 4}{-0,5} = \frac{1020}{-0,5} = 2040$$

$$S_{обш} = 2040 + 4 \cdot 1024 = 2040 + 4096 = 6136$$

Ответ: 6136 способов

1).



$$49 = 3x_1^2 \\ x_1^2 = 49 \\ x_1 = 7$$

$$3x_2^2 = 75 \\ x_2^2 = 25 \\ x_2 = 5$$

$$a = 3x_3^2 \\ x_3 = \sqrt{\frac{a}{3}}$$

Ука будет три случая.

I случай

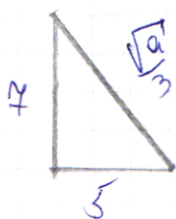
$\sqrt{\frac{a}{3}}$ - гипотенуза
 5 и 7 - катеты.

$$\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 = 5^2 + 7^2$$

$$\frac{a}{3} = 25 + 49$$

$$\frac{a_1}{3} = 74$$

$$a_1 = 222$$



II случай

$\sqrt{\frac{a}{3}}$ и 5 - катеты

7 - гипотенуза

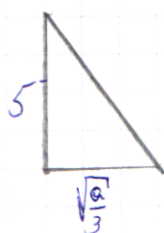
$$7^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 + 5^2$$

$$49 = \frac{a}{3} + 25$$

$$-\frac{a}{3} = -24$$

$$\frac{a_2}{3} = 24$$

$$a_2 = 72$$



III случай

$\sqrt{\frac{a}{3}}$ и 7 - катеты

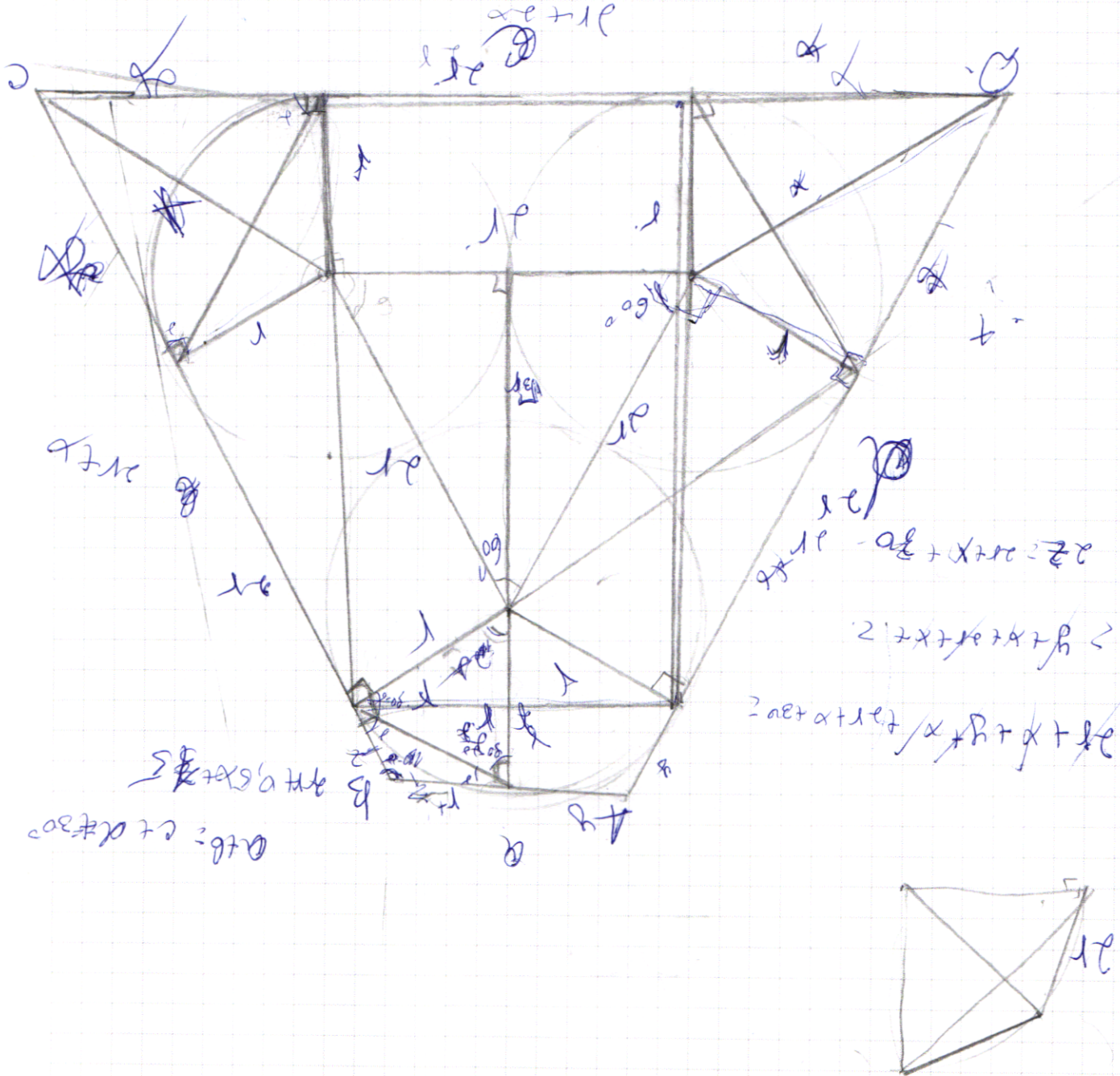
а 5 - гипотенуза.

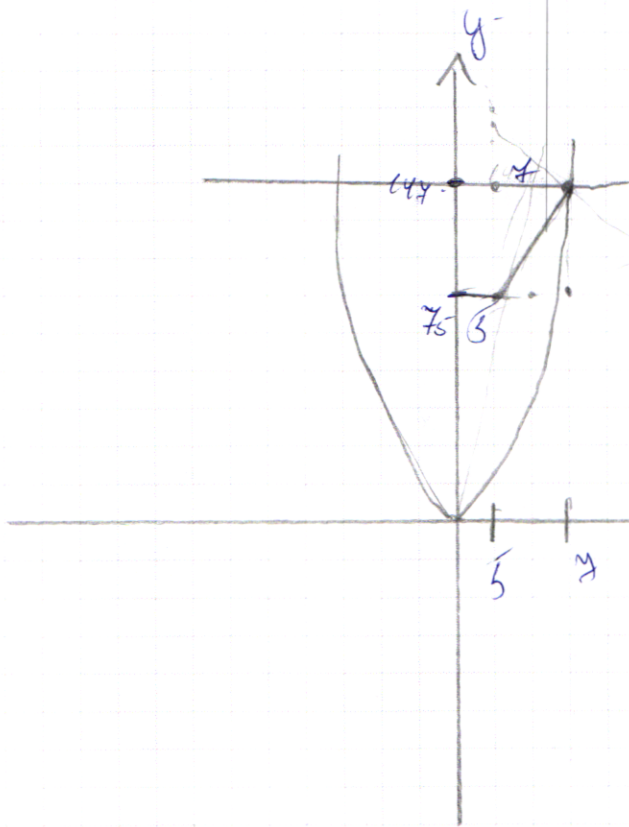
это вариант отпадает потому что

эта $\sqrt{\frac{a}{3}} > 0$ и $\sqrt{\frac{a}{3}} + 7 > 5$

Ответ: $a_1 = 222, a_2 = 72$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$y = 3x^2$$

$$(3x^2)^2$$

$$x = \sqrt{3a}$$

$$\sqrt{3a}^2 = y = 25 \rightarrow 2$$

$$3a = 49 + 25$$

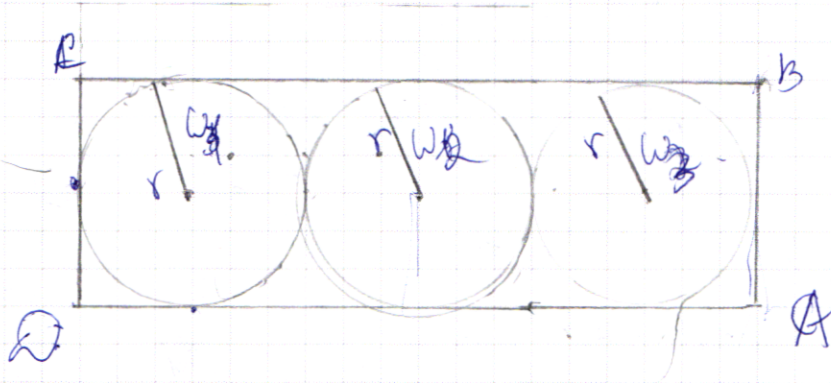
$$3a = 74$$

$$a = \frac{74}{3}$$

$$\sqrt{3a}^2 =$$

$$\frac{25}{49} + \frac{49}{25} = \frac{25^2 + 49^2}{2 \cdot 25 \cdot 49}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sqrt{x+1} \geq 0$$

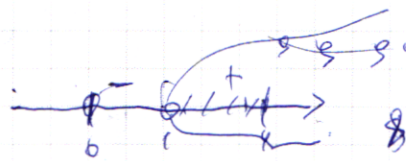
$$x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$a(x-3) \geq 0$$

$$ax-3a \geq 0$$

$$ax-3a \leq \sqrt{x+1}$$



$$(ax-3a) \geq y$$

$$(y, 4]$$

- 1, 2, 5, 7, 105, 112, 53, 8, 49, 103, 104, 105

$$25n+1 = 25(n-1)+1 = 25n+1-25n+25 = 25n+25$$

$$a(x-3) > y \mid ax-3a$$

$$103 \quad 104 \quad 105$$

$$\frac{103}{53} \quad \frac{104}{49}$$

$$25n + 1$$

$$x \cdot 21 + (x-y) \cdot 26 = 700$$

$$26(x+y) = 21(x+z)$$

$$4125n + 100 \cdot \frac{26}{15} \rightarrow$$

$$210 + x +$$

$$21 \cdot 21(x+y) / 26 = 700$$

$$26x - 26y = 21x + 21z$$

$$\frac{26}{15} \cdot 25n + \frac{130}{15} \rightarrow$$

$$21x +$$

$$25(n+1) / 25n +$$

$$5x - 26y = 21z$$

$$z = \frac{5x - 26y}{21}$$

$$a \cdot x > 69z^2$$

$$\frac{22}{15} \cdot 25n + \frac{110}{15}$$

$$\frac{500}{26} = 19.23$$

$$\frac{700}{43} \left| \frac{47}{14} \right. \begin{array}{r} 14 \\ 230 \\ -188 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$25n + 1, \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$\frac{26}{15} \cdot 25n - 24 \rightarrow \frac{130}{15} \cdot 25n - 24 = 3700 - 24 = 3676$$

$$\frac{45}{24} \cdot 21 + 18 = 45 + 18 = 63$$

$$25n + 1$$

$$21x + 26(x-y) = 700$$

$$\frac{21}{15} \cdot 105 = 147$$

$$20 \cdot 25 - 24 = 476$$

$$\frac{1 + 484}{2} \cdot 20 > 485 \cdot 0.02 = 9.7$$

$$21x + 26x > 700$$

$$\frac{700}{26} = 26.92$$

$$\frac{476 + 18}{485} = 1.0$$

$$\frac{18}{30} \cdot 21 = 12.6$$

$$21x + 22x < 700$$

$$47x > 700$$

$$43x < 700$$

$$x > \frac{700}{47}$$

$$x < \frac{700}{43}$$

$$\frac{700}{43} \left| \frac{16}{16} \right. \begin{array}{r} 16 \\ 270 \\ -254 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\frac{22}{16} \cdot 16 = 22$$

$$53 + 53 - 27 = 79$$

$$\frac{700}{43} \left| \frac{16}{16} \right. \begin{array}{r} 16 \\ 230 \\ -188 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$21x + (x-y) \cdot 26 = 26(x+y) = 21(x+z)$$

$$x - y = x + z \Rightarrow -y = z \Rightarrow y = -z$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Как дана промежутки $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, ...
и т.д. Как можно найти сумму 20 выбранных чисел
таких, чтобы у которых разность между
двумя числами не делилась на 25!

1 - наше первое число.

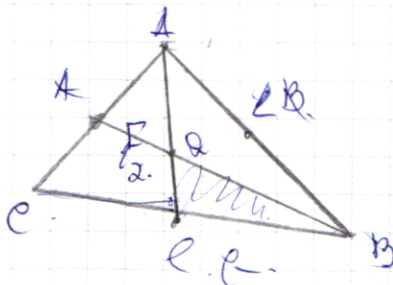
(та как как сказано как наименьшее число)
вот почему мы

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 225 \\ + 26 \\ \hline 485 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 485 \\ - 27 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 26 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \times 26 \quad 5 \\ 239 \\ + 26 \\ \hline 484 \end{array}$$



$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$$

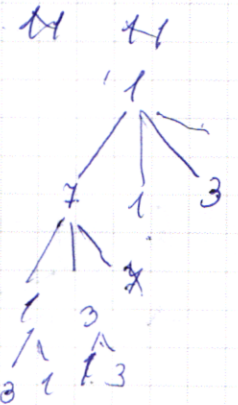
$$5AF = 3FC$$

$$AF = \frac{3}{5} FC$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{4}{25}$$

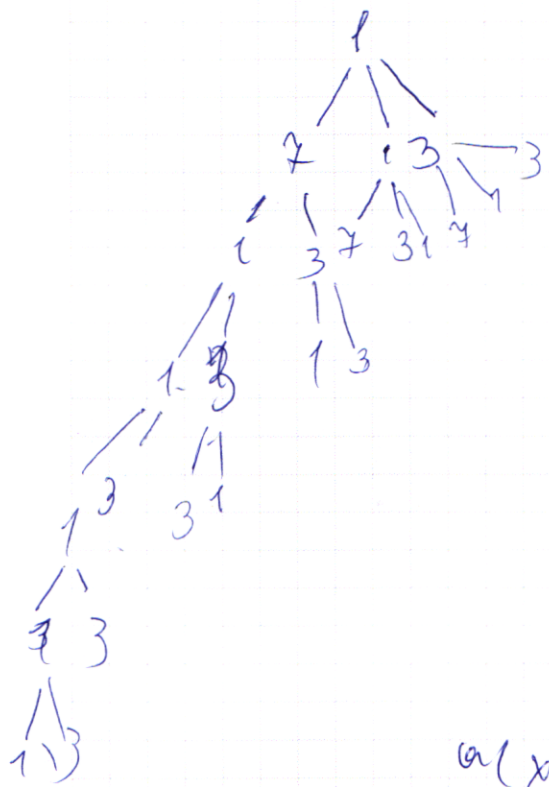
$$C_3 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$$

$$A_3 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$



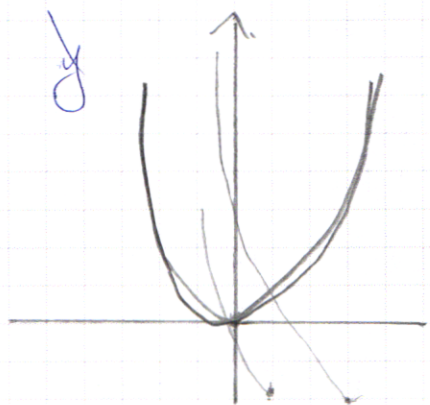
$$P_{105} = 105!$$

$$\frac{4! \cdot 3!}{12 \cdot 24} = 25$$



$$C_{11}^3$$

$$C_{11}^{11} = \frac{11!}{1! \cdot 10!}$$



$$3x^2 + 4x = 44$$

$$3x^2 + 4x - 44 = 0$$

$$3x^2 + 4x - 45 = 0$$

$$a(x-3) \leq 1$$

$$x=3$$

$$a \geq x-7$$

$$(x-3)(x-7) = 0$$

$$ax^2 + b \leq \sqrt{x-1}$$

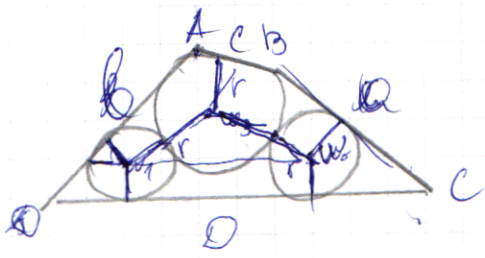
$$ax - 3a \leq \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x-1} \geq 0$$

$$ax - 3a \geq 0$$

$$a(x-3) \geq \sqrt{x-1}$$

$$\frac{700 - 460}{21 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{240}{252} = \frac{100}{105} = \frac{20}{21}$$



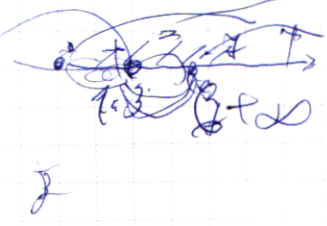
$$a(x-3) \leq 0$$

$$a < 0$$

$$x \geq 3$$

$$a+b - (c+d) = 30$$

$$a+b = 30 + c+d$$



$$a(x-3) = \sqrt{x-1}$$

$$a^2(x^2 - 6x + 9) = x-1$$

$$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 = x-1$$