

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

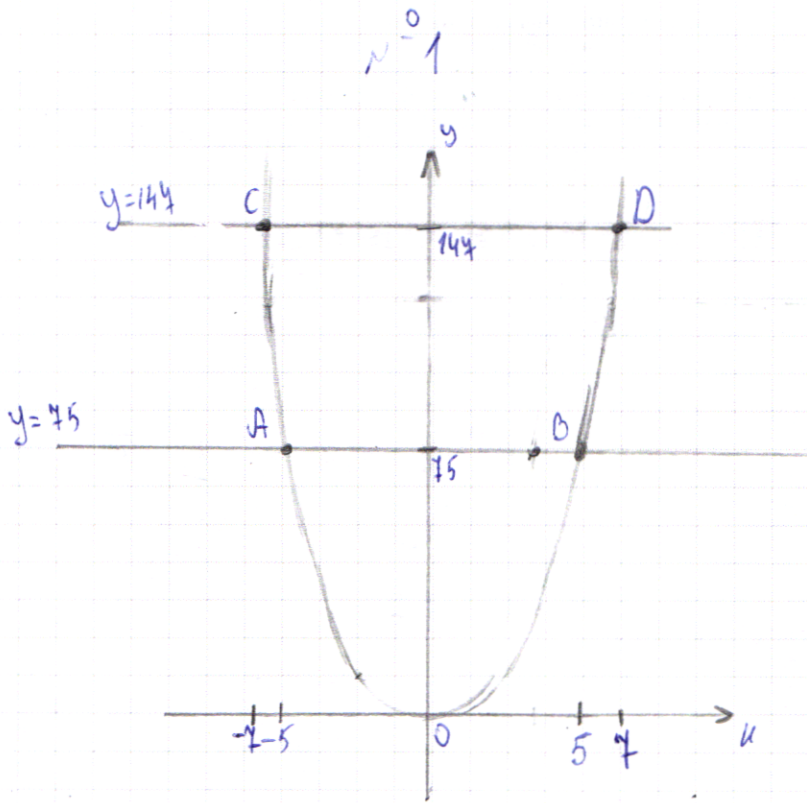
ШИФР

4-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 3x^2$  пересекает прямые  $y = 147$ ,  $y = 75$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ . Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 30$ .
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$  является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка  $[1; 25]$ ,  $[26; 50]$ ,  $[51; 75]$ ,  $[76; 100]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?





1) Кадгдгн гшмн AB:

$$y = 3x^2 = y = 75;$$

$$75 = 3x^2,$$

$$x^2 = 25;$$

$x = \pm 5$  - координаток A и B

$$A(-5, 75); B(5, 75)$$

$$AB = 10$$

2) Кадгдгн гшмн CD:

$$3x^2 = 144;$$

$$x^2 = 48;$$

$$x = \pm 4$$

$$C(-4, 144); D(4, 144)$$

$$CD = 14$$

3) По П. Понорона: <sup>AB < CD, максимум AB-не минимум</sup>

1) Вариант: AB-катет; CD-катет;

FE - иск. гипотенуза

$$FE = \sqrt{AB^2 + CD^2}$$

$$FE = \sqrt{296}$$

$$FE = 2\sqrt{74}$$

~~FE~~ Коорд и координаток

$$-\sqrt{44}; +\sqrt{44};$$

$$x = \pm \sqrt{44}$$

$$x^2 = 44;$$

$$3x^2 = 222;$$

$$y = 222$$

$$a = 222$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N°1

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$3x^2 = 144;$$

$$x^2 = \frac{144}{3}$$

$$x^2 = 49;$$

$$x = \pm 7;$$

$$3x^2 = 42$$

$$x^2 = 14$$

$$x = \pm 2\sqrt{14}$$

$$\begin{array}{r} 144 \overline{) 3} \\ - 12 \phantom{0} \\ \hline 24 \\ - 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$y_{\text{min}} = 4\sqrt{6}$$

$$10^2 + (4\sqrt{6})^2 = 144;$$

$$106 + (16 \cdot 6) = 190;$$

$$100 + 96 = 196$$

верно

$$\sqrt{296} = 2\sqrt{74}$$

$$10^2 + 14^2 = 100 + 196 = 296$$

$$\begin{array}{r} 296 \overline{) 16} \\ - 16 \phantom{0} \\ \hline 136 \\ - 136 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$296 =$$

$$\begin{array}{r} 296 \overline{) 2} \\ 148 \phantom{0} \\ \hline 148 \\ - 148 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$3x^2 = 42$$

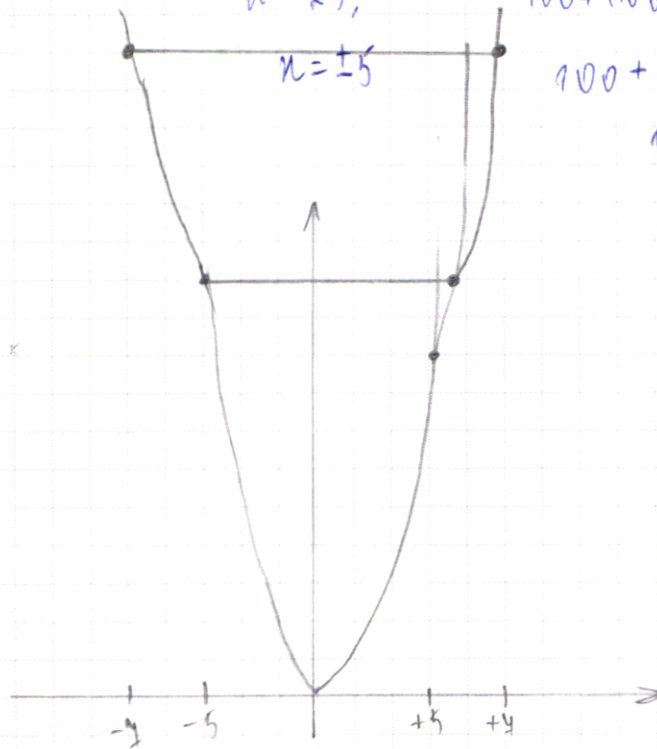
$$x^2 = 14$$

$$x = \pm 2\sqrt{14}$$

$$3x^2 = 75;$$

$$x^2 = 25;$$

$$x = \pm 5$$



$$10^2 + x^2 = 144;$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

$$y_6 = 36$$

$$\begin{array}{r} 96 \overline{) 3} \\ 32 \phantom{0} \\ \hline 16 \phantom{0} \\ - 16 \\ \hline 8 \phantom{0} \\ - 8 \\ \hline 4 \phantom{0} \\ - 4 \\ \hline 2 \phantom{0} \\ - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x = \pm \sqrt{144};$$

$$x^2 = 144$$

$$3x^2 = 222$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) 2 варианта

AB-катета; CD-высота, PH-чек. окруж.

$$CD = \sqrt{AB^2 + PH^2}$$

$$PH = \sqrt{100 + PH^2}$$

$$196 = 100 + PH^2$$

$$PH^2 = 96$$

$$PH = \sqrt{96}$$

Коорд. и радиус окруж.

$$\pm 2\sqrt{6}; +2\sqrt{6}$$

$$k = \pm 2\sqrt{6}$$

$$k^2 = 24$$

$$3k^2 = 72$$

$$y = \frac{72}{2}, a = 4k$$

Ответ:  $2\sqrt{2}; 4\sqrt{2}$

№ 4

$$|ak - 3a| \leq \sqrt{k-1}, k \geq 1$$

$$(ak - 3a)^2 \leq k-1$$

$$(a^2(k-3))^2 \leq k-1$$

$$a^2(k-3)^2 \leq k-1$$

$$a^2(k^2 - 6k + 9) \leq k-1$$

$$a^2 k^2 - 6a^2 k + 9a^2 \leq k-1$$

$$-6a^2 k^2 - k - (-6a^2 - 1)k$$

$$a^2 k^2 - 6a^2 k + 9a^2 \leq k-1$$

$$a^2 k^2 - 6a^2 k - k + 9a^2 + 1 \leq 0$$

$$a^2 k^2 - (6a^2 + 1)k + 9a^2 + 1 \leq 0$$

$$a^2 k^2 - (6a^2 + 1)k + 9a^2 + 1 \leq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (6y+1)^2 - 4y(9y+1) \\ = 36y^2 + 12y + 1 - 36y^2 - 4y = 8y + 1$$

$$u_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6y+1 \pm \sqrt{8y+1}}{2y}$$

$$= \frac{z-400}{z}$$

$$u_2 = \frac{6y+1 - \sqrt{8y+1}}{2y}$$

$$z = 500$$

$$z = 62$$

$$z = 100$$

$u_1$

$$z = 10$$

$$z = 10$$

$b$

$1$

$1$

$1$

$$452 | 34$$

$$- 1016$$

$$- 352$$

$$- 1016$$

$$- 352$$

$$- 1016$$

$$- 352$$

$$- 1016$$

$$- 352$$

$$- 1016$$

$$- 352$$

$$- 1016$$

$$- 352$$

$$- 1016$$

$$- 352$$

$$- 1016$$

$$- 352$$

$$- 1016$$

$$- 352$$

№5

1) 12 вариантов размещения 8 человек:



2) 11 позиций <sup>взв. от 4</sup> - 2 либо 5  
 $\downarrow$   
 $P_{11}^{11}$

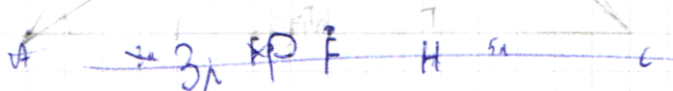
3) Кол-во мест:  $12 \cdot 2^{11} = (2^5)^2 \cdot 2 \cdot 2 = (32)^2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024 \cdot 2 \cdot 2 = 2048 \cdot 2 = 24576$   
 Ответ: 24576

Коллекция решение с того, что выдран макс. взв. числа из первого или второго промежутка:

1) 1, 2, 3, 4, 5;

2) 76, 77, 78, 79, 80;

Цел. Числа и их значения, выдраны макс. числа из группы групп макс, чтобы различно  
 чтобы группа чисел не отличалась на 25



1, 2, 3, 4, 5  
 31, 32, 33, 34, 35  
 61, 62, 63, 64, 65  
 91, 92, 93, 94, 95

в первом случае числа из каждой группы увелич. на 30

76, 77, 78, 79, 80  
 56, 57, 58, 59, 60  
 36, 37, 38, 39, 40  
 16, 17, 18, 19, 20

во втором случае числа из каждой группы увелич. на 20.



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$46, 47, 48, 49, 50$   
 $56, 57, 58, 59, 60$   
 $36, 37, 38, 39, 40$   
 $16, 17, 18, 19, 20$   
 $16+17+18+19+20 = 90$   
 $30 \cdot 3 = 90$   
 $90+90+90+90 = 360$   
 $+ 20 \cdot 5 = 100$   
 $360+100 = 460$

$1, 2, 3, 4, 5$   
 $15+45+75+105 = 240$   
 $31, 32, 33, 34, 35$   
 $56, 62, 63, 64, 65$   
 $91, 92, 93, 94, 95$   
 $S_{OQL} : S_{OAC} = 4 : 25$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$   
 $2 = 3^2$   
 $Q P = 4H$   
 $\frac{Q P}{A F} = \frac{4H}{A C}$   
 $\frac{12}{3x} = \frac{4H}{2x}$   
 $\frac{42}{x} = \frac{4H}{5x}$

$280+190+590 = 1060$   
 $280 + 680 = 960$   
 $1024 \cdot 32 = 32768$   
 $2048 \cdot 12 = 24576$

1)

2)

3)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём сумму в первом случае:

$$1+2+3+4+5=15$$

$$15+165+315+465=$$

$$= 960$$

Найдём сумму во втором случае

$$16+17+18+19+20=90$$

$$90+180+270+360=960$$

В) Зная сумму с числ. бармалана  
сумма <sup>числ</sup> равна 960

Ответ: 960

№ 3

Пусть  $x$  - кол-во апельсинов,  $y$  - кол-во тарок лимона;

$21x$  - кол-во подаренных тарок

$26(x-1)$  - кол-во тарок ( $z$  - кол-во лимон. апельсинов)

1) Пусть  $z=1$

$$21x + 26(x-1) = 400$$

$$21x + 26x - 26 = 400$$

$$47x = 426$$

$$\begin{array}{r} 426 \overline{) 47} \\ \underline{-44} \phantom{0} \\ 256 \end{array} \quad \begin{array}{r} 44 \\ 1 \end{array} \quad \text{— не цел. значение}$$

$z \neq 1$

2) Пусть  $z=2$

$$47x - 26 \cdot 2 = 400$$

$$47x = 452$$

$21 \cdot 16 = 336$  (тарок) — это подарено;

$26 \cdot 2 = 52$  (тарок) — это лимон.

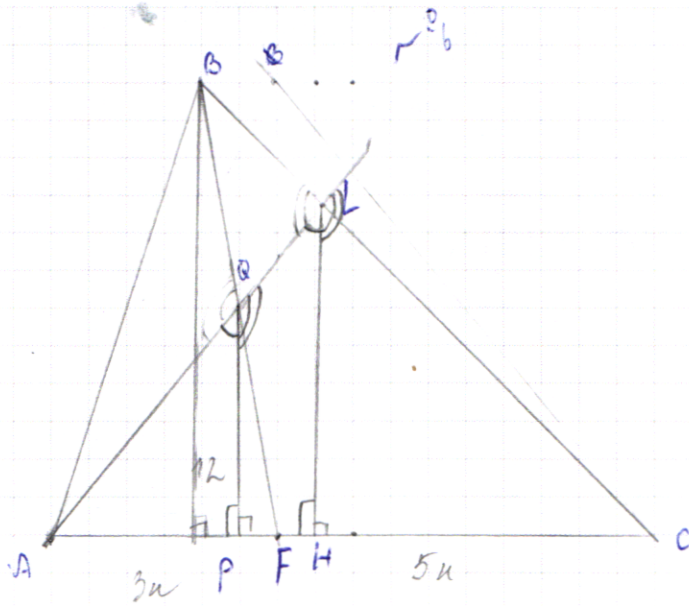
ответ: 364

$$\begin{array}{r} 452 \overline{) 47} \\ \underline{-44} \phantom{0} \\ 252 \\ \underline{-238} \\ 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 16 \\ \hline 126 \\ + 210 \\ \hline 336 \end{array}$$

$x=16$  — лимон в таро

$$\begin{array}{r} 416 \overline{) 26} \\ \underline{-26} \phantom{0} \\ 156 \\ \underline{-156} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 364 \overline{) 26} \\ \underline{-26} \phantom{0} \\ 104 \\ \underline{-104} \\ 0 \end{array}$$



Дано:  $\triangle ABC$ ;  $BE \perp AC$ ,  $AP:PE = 3:5$ ;  $BE \cap AL = Q$ ;  $QP$  - перпенд. до  $AC$ ,  $QP = 12$ ;

$$S_{BQL} : S_{BAC} = 4:23$$

Найти:  $LH$  - перпенд. от  $L$  до  $AC$

Решение: 1)  $\triangle AQP \sim \triangle ALH$  по двум углам.  $\angle AQP = \angle ALH = 90^\circ$ ,  $\angle LAH$  - общий

2)  $QP \perp AC$ ,  $LH \perp AC$ , значит  $QP \parallel LH$

3)  $BE$  - высота  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ABF$ ,  $\triangle FBC$ ;

$$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ABF} : S_{\triangle FBC} = 8:3:5$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-004  
ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)