

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

11-017

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 5x^2$  пересекает прямые  $y = 125$ ,  $y = 80$  и  $y = a$ , отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ . Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 28$ .
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$  является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 4 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 25$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 40]$ ,  $[41; 80]$ ,  $[81; 120]$ ,  $[121; 160]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



## Задача 7

$$I - [1; 40]$$

$$II - [41; 80]$$

$$III - [81; 120]$$

$$IV - [121; 160]$$

min сумма I промежутка

$$\text{равен } \frac{1+40}{2} \cdot 6^3 = 21$$

min сумма II промежутка

$$\text{равен } \frac{41+80}{2} \cdot 6^3 = 3 \cdot 87 = 261$$

min сумма III промежутка

$$\text{равен } \frac{81+120}{2} \cdot 6^3 = 3 \cdot 167 = 501$$

min сумма IV промежутка

$$\text{равен } \frac{121+160}{2} \cdot 6^3 = 3 \cdot 247 = 741$$

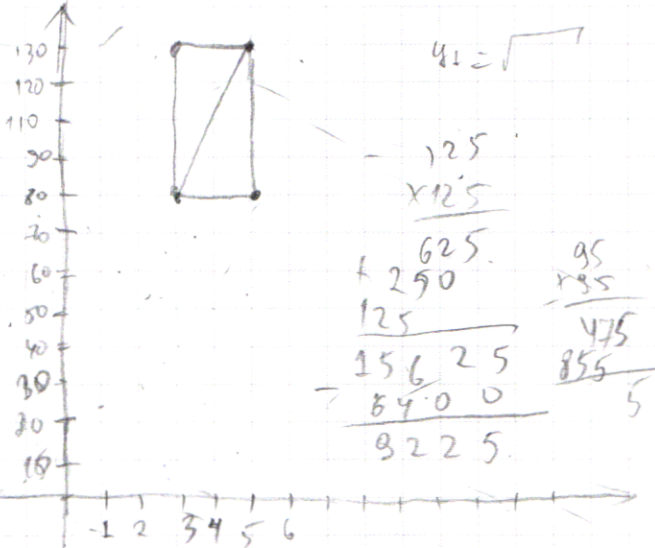
min  
то сумма 24 чисел из данных промежутков

$$21 + 261 + 501 + 741 = 1524$$

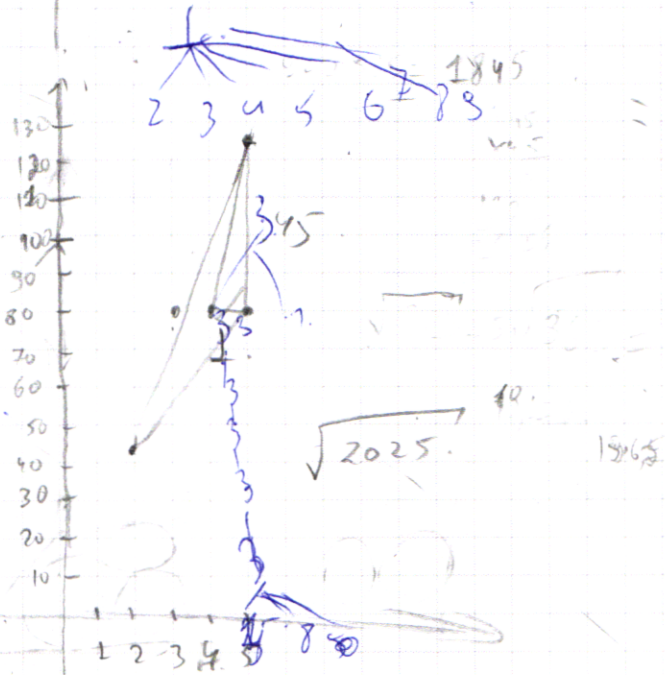
Ответ: 1524.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} + 167 \\ - 3 \\ \hline 501 \end{array} \quad 2.$$



$$\begin{array}{r} + 741 \\ + 501 \\ \hline + 261 \\ + 21 \\ \hline 1524 \end{array} \quad 1.$$



$$15x - y = 17y + 17$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 17 \\ \hline + 168 \\ + 24 \\ \hline 408 \end{array} \quad 2.$$

$$\sqrt{2024} = 5x?$$

$$x = \sqrt{\frac{2024}{25}}$$

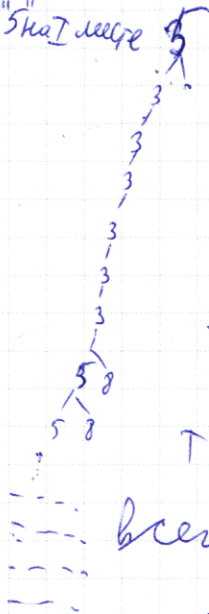
$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = 3.$$

# Задача 5.

(Дл.) Если на первом месте стоит цифра 5 и 8.

То будет так.

Случай при "5" на I месте



То всего (различных) чисел. для случая  $2^{12} \cdot 2^6 = 2^{18}$ .

Т.к. 3 может быть с 2-7 т.е их кол-во 3-8 в 13 местах. 4-9 5-10

то всего.

$13 \cdot 2^{12}$  кол-во для стоящих на I месте.

Т.к. для 8 тоже будет так же то для "5" и "8"

всего  $2 \cdot 13 \cdot 2^{12} = 26 \cdot 2^{12}$ .

а для "3" стоящих на I месте

$2^{12} \cdot 2^6 = 2^{18}$  то всего таких 18значных.

$26 \cdot 2^{12} + 2^{18} = 27 \cdot 2^{12}$  18 значных

Ответ:  $27 \cdot 2^{12}$  18-значных чисел.



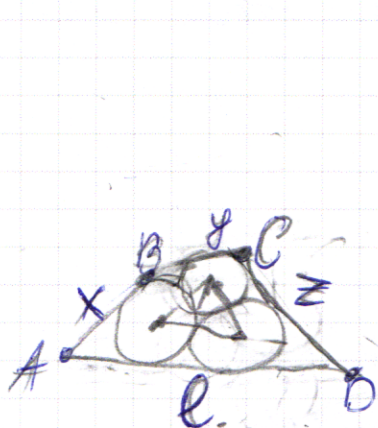
ШИФР  
(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten notes on a grid background:

- Vertical list of curly braces on the left side.
- Equation:  $C_6^{12} =$
- Equation:  $5 \wedge 58$
- Equation:  $5 \cdot 8$
- Equation:  $5 \cdot 8$
- Equation:  $2 \cdot 16 \cdot 2^{12} = 2^{13}$
- Small scribbles at the bottom left.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sqrt{2}$

пусть  
 $AB = x$   
 $BC = y$   
 $CD = z$   
 $AD = l$

ответ: 4.

$$(l+y) - (x+z) = 28$$

$$l+y = x+z+28$$

$\sqrt{4}$

$$|ax-a| \leq \sqrt{x-3}$$

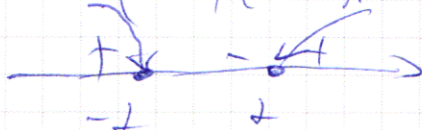
$$|a(x-1)| \leq \sqrt{x-3}$$

$$a^2(x-1)^2 \leq x-3$$

$$a^2 \cdot (2-1)^2 \leq 2-1$$

$$a^2 \geq 1$$

$$(a-1)(a+1) \geq 0$$



$$a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

ответ:  $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

№3

Пусть у него альбома  $x$  страниц то у школьника  
 $17x + 17$  страниц. Т.к если в этих <sup>таких</sup> же страницах  
написет 22 то у него станет 300 марок. То есть уравнение

$$17x + 17 + 22x = 300$$

$$39x = 883.$$

$$x = 22 \frac{25}{39}.$$

Но т.к. такое стр. не может быть целым то у него сейчас  
 $23 \cdot 17 + 17 = 17 \cdot 24 = 408$  марок

ответ: 408 марок.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y_2 = 80$$

$$5x^2 = 80$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -4$$

Пусть возьмём на  
I четверть

$$y_1 = 125$$

$$5x^2 = 125$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -5$$

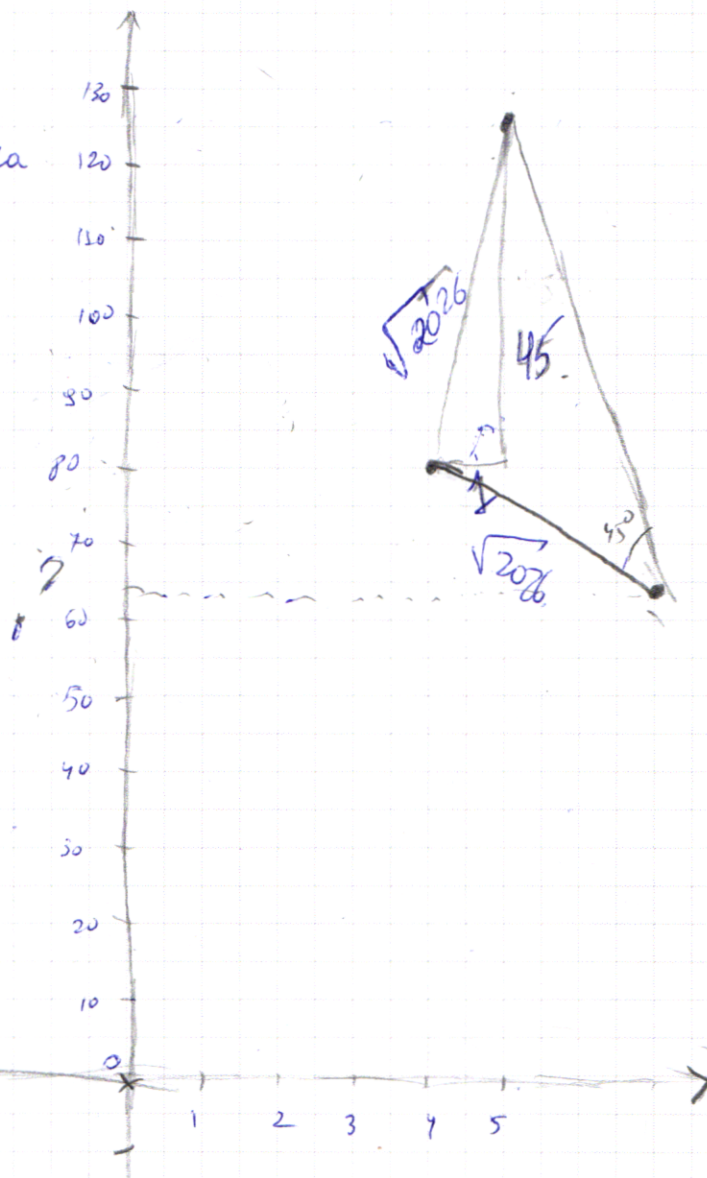
$$y_1 - y_2 = 45 = a$$

$$x_1 - x_2 = 1 = b$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{2026}$$

$\sqrt{1}$



$$\frac{\sqrt{2026}}{x} = \operatorname{tg} 45^\circ$$

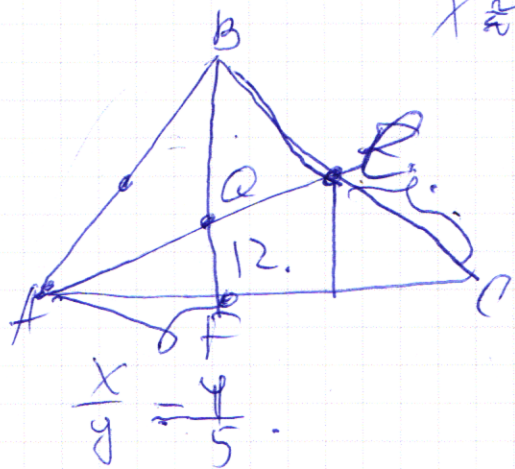
$$x = \sqrt{2026}$$

Ответ:  $\sqrt{2026}$

$$d = \sqrt{45^2 + 1} = \sqrt{2025 + 1} = \sqrt{2026} \approx 45,01$$

$$|5x - 1| = 9x^2$$

$$x \geq 3$$



$$\left(\frac{3}{5}\right) \frac{5}{5} = \frac{1}{5} \cdot |ax - a| \leq \sqrt{x-3}$$

$$-\sqrt{x-3} \leq ax - a \leq \sqrt{x-3}$$

$$-\sqrt{x-3} \leq a(x-1) \leq \sqrt{x-3}$$

$$\sqrt{x}$$

$$x-3 \geq a(x-1)^2$$

$$\leq 1 \geq a$$

$$a \geq a$$