

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР

5-012

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

Составлю условие, составлю систему неравенств и решим её:

x - кол-во шипов в альбоме;

N - кол-во марок;

$$21x + N = 700 \Rightarrow x = \frac{700 - N}{21}$$

$$\begin{cases} 22x < N; \\ N \leq (x-1) \cdot 26; \end{cases} \begin{cases} 22 \left(\frac{700 - N}{21} \right) < N; \\ N \leq \left(\frac{700 - N}{21} - 1 \right) \cdot 26; \end{cases} \begin{cases} \frac{15700}{21} < \frac{43N}{21}; \\ \frac{47}{21} N \leq \frac{17654}{21}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N > 365 \frac{5}{43} \\ N \leq 375 \frac{29}{47} \end{cases}$$

А так как кол-во марок может быть только целое, то $365 < N \leq 375$

Ответ: $365 < N \leq 375$

№ 5

Для начала, нужно расположить наш ряд из цифр "7".
Таких вариантов всего 12.

А вот оставшиеся 11 пропусков мы будем заполнять цифрами "1" и "5". Вариантов расположения для $2048 - 2 = 2046$, так как в условии сказано, что каждая цифра должна быть использована.

Отсюда имеем, что кол-во 19-значных чисел равно:

$$2046 \times 12 = 24552.$$

Ответ: 24552.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

u - количество машин

N - количество машин

$u \geq 1$
 $N > 22u$

$N > (u-1) \times 26$

~~$u \leq \frac{700}{21}$~~

$700 > 26u - 26 + 21u$

$700 > 47u - 26$

$700 > N + 21u$

$726 > 47u$

$(u-1) \times 26 \leq N$

$u \leq \frac{726}{47}$

$700 > (u-1) \times 26 + 21u$

$(u-1) \times 26 \geq N$

$700 = 21u + N$

$u \leq \frac{700 - N}{21}$

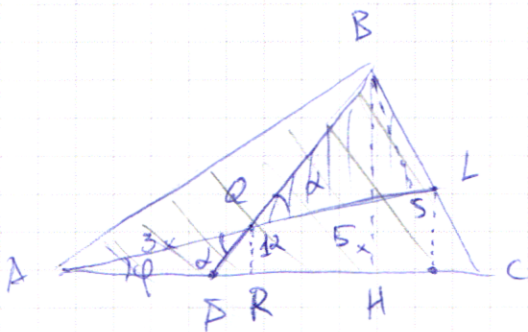
$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$; $x \geq 1$

при $x \leq 1 \rightarrow |ax - 3a| = 0$; $a = 3a$ $22u < N \leq (u-1) \times 26$

$|a(x-3)| \leq \sqrt{x-1}$

при $x \geq 1$

$\begin{cases} \frac{22(700-N)}{21} < N \\ N \leq 26 \times \left(\frac{700-N}{21} \right) \end{cases}$



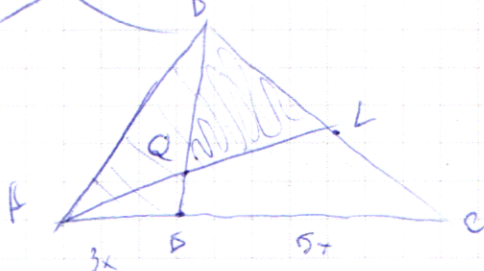
$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{4}{25}$; $\frac{AS}{AL} = \frac{3}{5}$

$S_{BAC} = \frac{BH}{2} \times 8x$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{BS \times QL}{BH \times 8x} = \frac{4}{25}$

$S_{BQL} = \frac{BS}{2} \times QL$

~~$AQ = \sqrt{144 + 9x^2}$~~





12 вариантов расположить восемь "2"

где случаи с боковыми размещениями: 2 вар. выбрать 9-ую цифру;

- 2 2 2
- * * *
- 5 5 5
- 2 9 5 v
- 2 5 2 v
- 5 2 2 v
- 5 9 2 v
- 5 2 5 v
- 2 2 5 v

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

- 2 2
- * * *
- 5 5
- 2 5
- 5 2

(15, 2)

2
*
5

- 1 1 1 2 v 2 3 v
- * * * 1 3 v 3 1 v
- 2 2 2 1 v 3 2 v
- 3 3 3 2 v 3 2 v

2222 x
xxxx
5555 v

- 2555 2525
- 5222 5252
- 2255 5255
- 5522 2522
- 2225 5225
- 5552 2552

$$5 \times 2 \times 64 = 640$$

4-го 7
или 8 9 5 2

$$(m \times n) \times 2 = 2$$

10 1024

или 2 или 4 или 11 2048 12

$$((11 \times 2) \times 2 - 2) \times 12 = 504 \text{ числа}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 12 \\ \hline 128 \\ + 640 \\ \hline 768 \end{array}$$

или $n = d$

$m = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$

n, m , где $n = \text{const}$
 $n, m+1$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 679 \\ \times 26 \\ \hline 4038 \\ + 7000 \\ \hline 17654 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200 \\ \times 26 \\ \hline 1200 \\ + 4000 \\ \hline 5200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18200 \quad | \quad 47 \\ \underline{141} \\ 410 \\ \underline{370} \\ 340 \\ \underline{329} \\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 387 \\ \times 47 \\ \hline 2709 \\ + 1548 \\ \hline 18189 \end{array}$$

$$22 \left(\frac{700 - N}{21} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{22 \times 700}{21} - \frac{22N}{21} < N \\ N \leq \frac{26 \times 700}{21} - \frac{26N}{21} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 22n < N \\ N \leq \frac{26 \times (700 - N)}{21} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{47}{21} N \leq \frac{18200}{21} \\ \frac{14700}{21} < \frac{43N}{21} \end{array} \right.$$

$$N \leq \frac{587}{47} \quad | \quad 11$$

$$N > \frac{341}{43} \quad | \quad 8$$

$$341 < N \leq 387$$

$$\begin{array}{r} 15700 \quad | \quad 43 \\ \underline{129} \\ 280 \\ \underline{258} \\ 220 \\ \underline{215} \\ 5 \end{array}$$

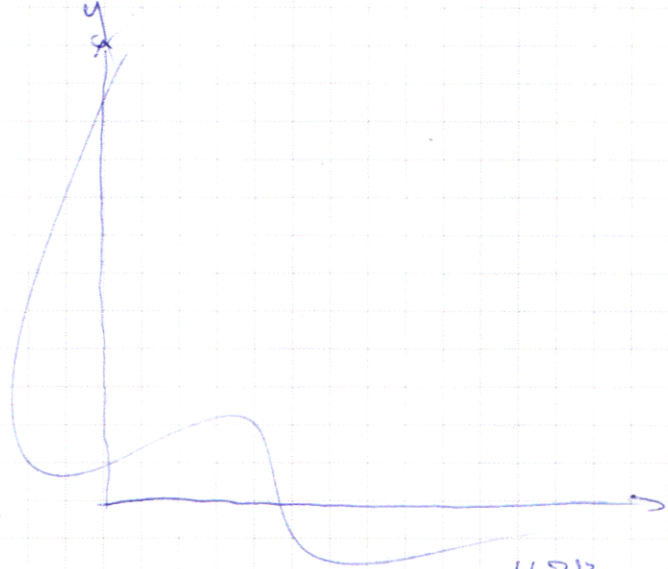
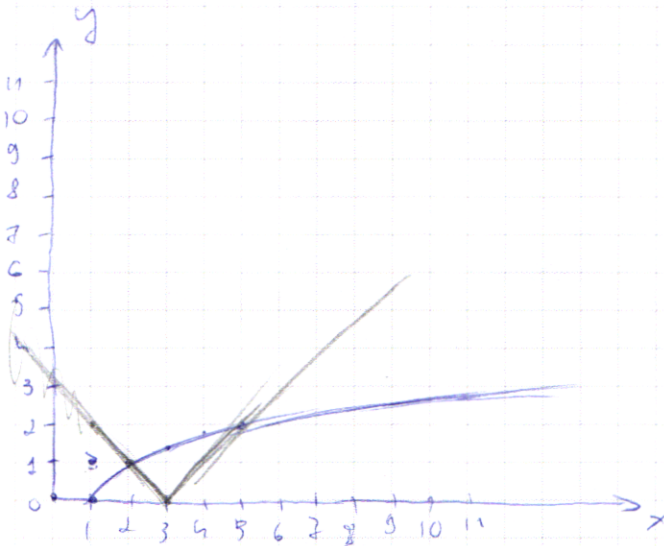
$$\begin{array}{r} 2046 \\ \times 12 \\ \hline 4092 \\ + 2046 \\ \hline 24552 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15700 \quad | \quad 43 \\ \underline{129} \\ 180 \\ \underline{172} \\ 80 \\ \underline{43} \\ 37 \end{array}$$

22x

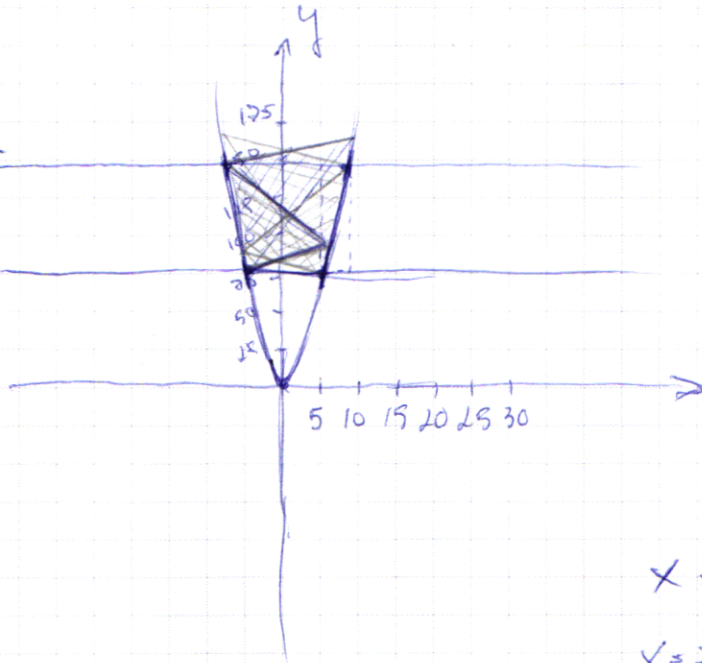
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|a(x-3)| \leq \sqrt{x-1}$$



$$a \neq 0$$

$$a \leq 1$$



$$\begin{array}{r} 147 \div 3 \\ -12 \quad 149 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\frac{147}{3} = x^2 \Rightarrow x = \pm 7$$

$$\frac{75}{3} = x^2 \Rightarrow x = \pm 5$$

и прашаю. 7.

$$x = \pm 6$$

$$\underline{36 \times 3 = 108}$$

$$x = \pm 9$$

$$\underline{81 \times 3 = 243}$$

$[1; 25], [26; 50], [51; 75], [76; 100]$

Клужа вобдиран $25 \sim 50 (75, 100)$

$1+2+3+4+5 = 15 - 1 \text{ туд}$

$30+31+32+33+34 = 165 - 205$

$6+7+8+9+10$

1 2 3 4 5

~~31 32 33 34 35 36 37 38 39 40~~

~~50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 100~~

~~86 87 88 89 90~~

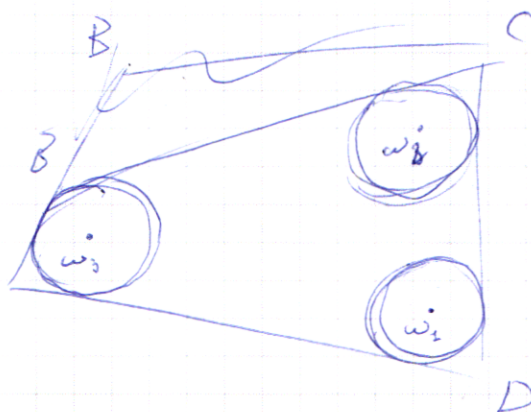
3 4 5 6 7 8 10 (1)

~~27 28 29 30~~ (2) ~~46 47 48 49 52 54~~

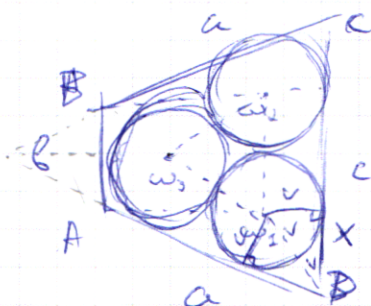
~~52 54 56 58 59~~ (3)

(4)

(5)



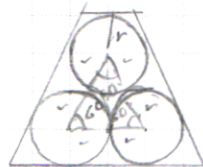
$(AB+BC) - (AB+CD) = 30$



$AD \neq BC$

$AB = 2r$

$2a - (2r + c) = 30$



$\sqrt{4r^2 - r^2} = 5$

$\sqrt{3}r = 5$

Высота $r(2\sqrt{3})$

$x = \sqrt{a^2 - (r(2+\sqrt{3}))^2}$

$c = 2x + 2r = 2(x+r)$

$2a - (2(x+r)) = 30$

$x = \sqrt{4r^2 - r^2}$

$|a(x-3)| \leq \sqrt{x-1}$

$x \geq 1$

~~16 21 22 23 24 25~~

~~26 27 28 29 30~~

~~31 32 33 34 35 36 37 38 39 40~~



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-012

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-012

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)