МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР 7-005

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.

3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-3}$ является отрезок длины 2?

5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

1) график $y=5x^2$ пересекает прямую $y=125$ и даёт точки $A_1(5;125)$; $A_2(-5;125)$, длина отрезка $A_1A_2=10$

2) график $y=5x^2$ пересекает прямую $y=80$ и даёт точки $B_1(4;80)$, $B_2(-4;80$, длина отрезка $B_1B_2=8$

3) Представим, что A_1A_2 и B_1B_2 - катеты, =>

=> C_1C_2 (гипотенуза) $= \sqrt{(10)^2+(8)^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$. Так как ось Oy является осью симметрии, => $x_{c_1}=\sqrt{41}$, $x_{c_2}=-\sqrt{41}$.

Следовательно, $y_c = 5\cdot(\sqrt{41})^2 = 205$, => $a_1 = 205$

4) Пусть A_1A_2 - гипотенуза, B_1B_2 - катет, => C_1C_2 (второй катет) $= \sqrt{(10)^2-(8)^2} = 6$. Так как Oy является осью симметрии параболы, => $x_{c_1}=3$, $x_{c_2}=-3$, =>

=> $y_c = 5\cdot(3)^2 = 45$, => $a_2 = 45$

Ответ: $a_1=205$, $a_2=45$

3

1) Пусть n - количество страниц, S - количество марок сейчас, k - количество оставшихся неиспользованных листов

2)

$$=> \begin{cases} 15n < S \\ 17(n-k) = S \\ k \geq 1 \\ 17(n-k)+22n = 900 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

3) пусть $k=1$, $\Rightarrow$ $39n=917$, $n \neq 23\frac{20}{29}$, $\Rightarrow k \neq 1$

4) пусть $k=2$, $\Rightarrow$ $39n=934$, $-\varnothing$

5) пусть $k=3$, $\Rightarrow$ $39n=951$, $-\varnothing$

6) пусть $k=4$, $\Rightarrow$ $39n=968$, $-\varnothing$

7) пусть $k=9$, $\Rightarrow$ $39n=1053$, $\Rightarrow n=27$

8) $\Rightarrow$ ~~$S = 17(27-9)+22\cdot 27 = 39\cdot$~~

$S = 17(27-9) = 306$

Ответ: У Чиполлино есть 306 марок

4

1) $|ax-a| \leq \sqrt{x-3}$

$(ax-a)^2 \leq x-3$

$a^2x^2-2a^2x+a^2-x+3 \leq 0$

$a^2x^2-(2a^2x+x)+(a^2+3) \leq 0$

$a^2x^2-(2a^2+1)x+(a^2+3) \leq 0$

2) $\sqrt{x-3}$, $\Rightarrow$ $x \geq 3$. Длина отрезка решения -2. Следовательно $x \leq 5$ должен быть

3) $a^2x^2-(2a^2+1)x+(a^2+3) \leq 0$

$D = 4a^4+4a^2+1-4a^2(a^2+3) = -8a^2+1$, $\sqrt{D} = \sqrt{-8a^2+1}$

$x_{1,2} = \dfrac{2a^2+1 \pm \sqrt{-8a^2+1}}{2a^2}$, $x=5$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $10a^2 = 2a^2+1 \pm \sqrt{-8a^2+1}$

$(8a^2-1)^2 = -8a^2+1$

$64a^4-8a^2=0$

$8a^2(8a^2-1)=0$, $\Rightarrow$ $a_1=0 - \varnothing$, $a_2=\sqrt{\frac{1}{8}}$, $a_3=-\sqrt{\frac{1}{8}}$

Ответ: $a = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-005
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

1) Подряд идущие шесть троек могут встретиться ровно 13 раз

2) Рассмотрим один случай

$$333333\underbrace{\square\square\square\square\square\ldots\square}_{12}$$

3) Всего комбинаций в данном случае – 3^{12} раз

4) Количество комбинаций без восьмёрки – 2^{12} раз

5) Количество комбинаций без пятёрок – 2^{12} раз

6) Во всех трёх случаях есть (повторяется) число $\underbrace{33\ldots3}_{18}$,

7) Итого в данном случае получаем –
$3^{12}-2^{12}-2^{12}-1$

8) Всего случаев – 13. Итого $13(3^{12}-2^{12}-2^{12}-1)$

Ответ: $13(3^{12}-2^{12}-2^{12}-1)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

7

1) Из четвёртого промежутка можно взять числа - 121, 122, 123, 124, 125, 126

2) Из третьего промежутка можно взять числа - 87, 88, 89, 97, 98, 99

3) Из второго промежутка можно взять числа - 51, 52, 53, 54, 55, 56

4) Из первого промежутка можно взять числа - 7, 8, 9, 10, 17, 18

5) Итого получаем - $1\overset{6}{\cancel{8}}89$

Ответ: Минимум - $1\overset{6}{\cancel{8}}89$ ~~руб~~

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

1) $y=5x^2$ пересекает $y=125$, $125=5x^2$, => $x_1=5$; $x_2=-5$

2) $y=5x^2$ пересекает $y=80$ в точках, $80=5x^2$, => $x_1=4$, $x_2=-4$

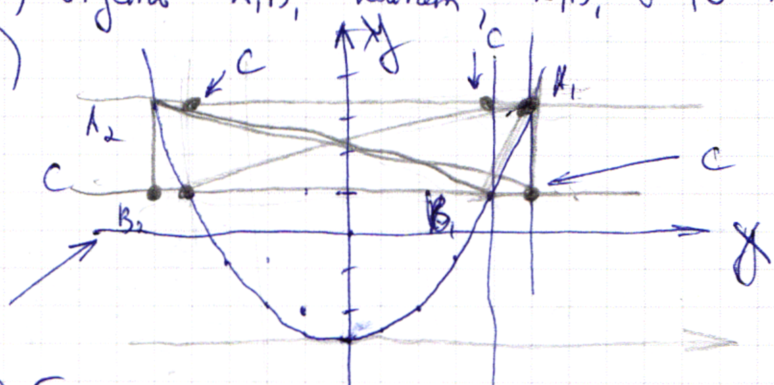
3) Обозначим ~~д~~ эти две точки вершинами

$A_1(5;125)$, $A_2(-5;125)$, $B_1(4;80)$, $B_2(-4;80)$

4) расстояние между точками $S=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

5) Пусть A_1B_1 - катет, $A_1B_1=\sqrt{(5-4)^2+(125-80)^2}=\sqrt{2026}$

6)



8) вектор нормали $\vec{p}=(45;-1)$, функция $\perp A_1B_1$ - $-45x+y=0$ при $x=4$ $y=-180$,

7) Пусть есть у нас отрезок A_1B_1

уравнение прямой $\frac{x-5}{4-5}=\frac{y-125}{80-125}$

$\frac{x-5}{-1}=\frac{y-125}{-45}$

$45x-225=y-125$

$y=45x-100$

$45x-y-100=0$

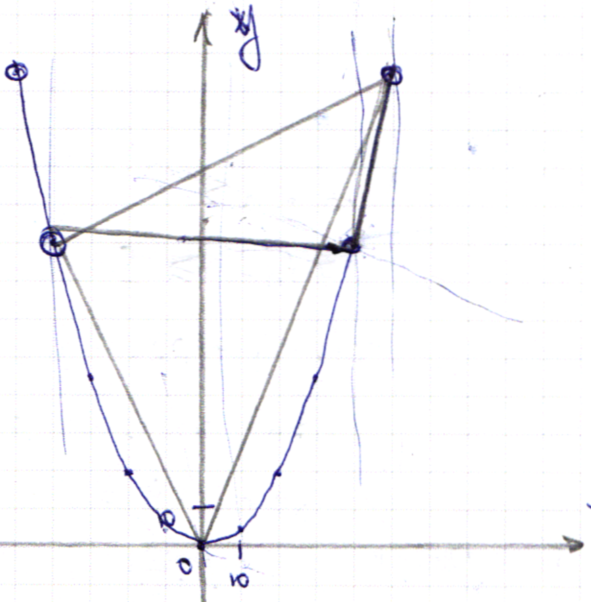
вектор нормали $\vec{p}=(45;-1)$

$-45x\ \cancel{+45}y=0$

при $x=4$, => $y=-\frac{4}{45}$, у должен равнятся 80, =>

$-x-45y+80\frac{4}{45}=0$

8) => $225x^2=-x+80\frac{4}{45}$; => $225x^2+x-80\frac{4}{45}$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

1) пересекает прямую $y=125$ и даёт точки
$A_1(5;125)$, $A_2(-5;125)$, длина отрезка $A_1A_2 = 10$ ~~см~~

2) пересекает прямую $y=80$ и даёт точки
$B_1(4;80)$, $B_2(-4;80)$, длина отрезка $B_1B_2 = 8$

3) Представим, что A_1A_2, B_1B_2 - катеты, => C (гипотенуза) =
$\sqrt{(10)^2+(8)^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$, т.к. ось Oy является осью симметрии, => $x_1 = \sqrt{41}$, $x_2 = -\sqrt{41}$, =>
$y_1 = 5\cdot(\sqrt{41})^2 = 205$; => $a_1 = 205$

4) Пусть A_1A_2 - гипотенуза, B_1B_2 - катет, => второй катет =
$= \sqrt{(10)^2-(8)^2} = 6$, т.к. ось Oy является осью симметрии,
=> $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, => $y_2 = 5\cdot(3)^2 = 45$; => $a_2 = 45$.

5) B_1B_2 не может быть гипотенузой, т.к. $A_1A_2 > B_1B_2$

Ответ: $a_1 = 205$, $a_2 = 45$

(2)

$n-$

$n-9$

27,5

$\begin{array}{r} 17 \\ \cdot\ 18 \\ \hline 136 \\ 17 \\ \hline 306 \end{array}$

$917 \,|\, 39$, 78, 137, 117, 20, 23; $23\frac{20}{39}$

$1053 \,|\, 39$, 27; 78, 273, 273

(3)

$$\begin{cases} 15\cdot n \leq S \\ 17(n-1) \geq S \\ 17(n-1)+22n = 900 \end{cases}$$

$17n-17+22n = 900$

$39n = 917$

$n = 26\frac{3}{39}$

$1036 \,|\, 39$, 26; 78, 256, 234

$15n \leq 17n-17$

$-2n \geq -17$

$n < 8{,}5$

$17n - 34 + 22n = 900$

$39n = 934$

$934 \,|\, 39$, 2; 78, 154

$968 \,|\, 39$, 2; 78, 188

$955 \,|\, 39$, 25; 78, 205, 195, 10

$1019 \,|\, 39$, 26; 78, 239, 234, 5

$1002 \,|\, 39$, 2; 78, 222

$15n < 17n - 17k$

$2n < 8{,}5k$

$39n - 17k = 900$

$39n = 900 + 17k$

$13n = 300 + 17\frac{k}{3}$

$17(n-9) = S$

$17\cdot 18 = S$

$S = 306$

Ответ: $S = 306$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-005
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 $|ax-a| \le \sqrt{x-3}$

$x-3 \geq 0$
$x \geq 3$

$5x-5 \le x-3$

, решение неравенства является отрезок длиной 2, => $3 \le x \le 5$

$25x^2-50x+25 \le x-3$

$25x^2-51x$

I $ax-a \geq 0$

$ax-a \le \sqrt{x-3}$

$a^2x^2-2a^2x+a^2 \le x-3$

$a(x-1) \le \sqrt{x-3}$

$a^2(x-1)^2 \le x-3$

$a^2(x-1)^2-(x-1) \le -2$

$(x-1)(a^2(x-1)-1) \le -2$

$(x-1)(a^2x-a^2-1) \le -2$

$(ax-a)^2 \le x-3$

$\frac{(ax-a)^2}{x-3} \le 1$

$x \le 5$

$\frac{5(ax-a)^2}{x-3} = x$

$5(ax-a)^2 = x^2-3x$

$5a^2(x-1)^2 = x^2-3x$

$a^2 = \frac{x(x-3)}{5(x-1)^2}$

$a^2(x-1)^2-x-3 \le 2 = x-5$

$a^2(x-1)^2-x \le 3$

$\frac{1}{8}x^2-\frac{10}{8}x+\frac{25}{8}=0$

$a^2(x-1)^2=-2$

$x^2-10x+25=0$

$x_1=5, x_2=5$

$|ax-a| = \sqrt{(ax-a)^2}$

$\sqrt{(ax-a)^2} \le \sqrt{x-3}$

$(ax-a)^2 \le x-3$

$a^2x^2-2a^2x+a^2+3 \le x$

$a^2x^2-2a^2x+a^2-x+3 \le 0$

$x^2-3x+2 \le 0$

$(x-1)(x-2) \le 0$

$(x-5)(A) \le 0$

$8a^2-1 = \sqrt{8a^4-8a^2+1}$

$64a^4-16a^2+1 = 8a^4-8a^2+1$

$56a^4-8a^2=0$

$8a^2(7a^2-1)=0$

$a=0$

$a=\pm\sqrt{\frac{1}{7}}$

$72a^4-24a^2+2=0$

$36a^4-12a^2+1=0$

$D=36-36=0$

$a^2_{1,2}=\frac{1}{6}$

$x_1x_2=5x_2$

$-(x_1+x_2)=-(5+x_2)$

$\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}=0$

$x^2-3x-5=0$

$a^2x^2-(2a^2+1)x-(a^2-3) \le 0$

$D=4a^4+4a^2+1+4a^2(a^2-3)=$

$=8a^4-8a^2+1=\sqrt{8a^4-8a^2+1}$

$D=64-32=32$

$x_{1,2}=\frac{2a^2+1 \mp \sqrt{8a^4-8a^2+1}}{2a^2}$

$\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{17}{6} \le 0$

$x^2-8x-17 \le 0$

$\frac{1}{7}x^2-\frac{9}{7}x+\frac{20}{7} \le 0$

$x^2-9x+20 \le 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

5)

1) 333333 $\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{12}$ 8 9

Всего таких чисел может быть $33333\underbrace{x\ldots x}_{12}$ – 3^{12} раз

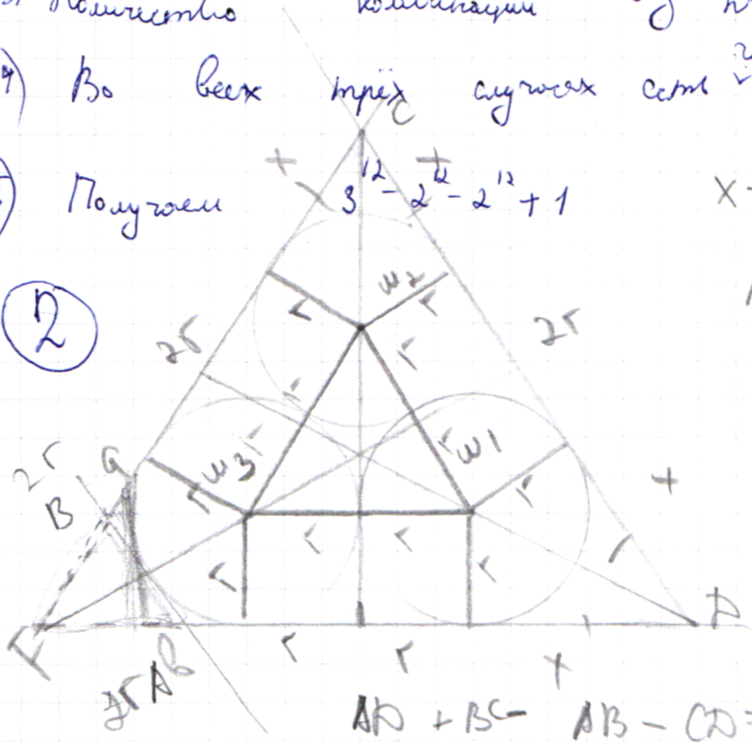
2) Количество комбинаций без восьмёрок – 2^{12}

3) Количество комбинаций без пятёрок – 2^{12}

4) Во всех трёх случаях есть число $\underbrace{33\ldots33}_{18}$

5) Получаем $3^{12}-2^{12}-2^{12}+1$

~~6~~ 2



$x+x+x$

$AD+BC-AB-CD=2r+l+a-c$

$AD=2r+x+b$

$CD=2x+2r$

$CB=2r+x+a$

$AB=c$

$AD+BC-AB-CD=2r$

$1+41+81+121+$

$2+42+82+12$

1, 2, 3, 44, 85, 126

1, 3,

Всего – 270 + 69 + 21 + 540 + + 500 + 25 = ~~21~~ = 1610 + 115 = = 1725

1, 2, 3, 4, 5, 6

47, 48, 49, 53, 55, 59

91, 92, 93, 94, 95, 96

137, 138, 139, 130, 140, 142

120 + 150 + 24 + 24

540 + 21

350 + 24 + 410 + 1

121, 122, 123, 124, 125, 126 – 720 + 21

87, 88, 89, 97, 98, 99 – 240 + 270 + 45

51, 52, 53, 54, 55, 56 – 300 + 21

7, 8, 9, 10, 17, 18 – 69

340 + 510 + + 720 + 69 = = 1520 + 169 = = 1589

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

7-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|ax-a| \leq \sqrt{x-3}$

$(ax-a)^2 \leq x-3$

$a^2x^2-2a^2x+a^2 \leq x-3$

$a^2x^2-(2a^2x+x)+a^2+3 \leq 0$

$a^2x^2-(2a^2+1)x+(a^2+3) \leq 0$

$D = 4a^4+4a^2+1-4a^2(a^2+3) =$

$= 16a^2+1$; $\sqrt{D} = \sqrt{16a^2+1}$

$x_{12} = \frac{2a^2+1 \mp \sqrt{16a^2+1}}{2a^2}$, пусть $x_1=5$

$10a^2 = 2a^2+1+\sqrt{16a^2+1}$

$(8a^2-1)^2 = 16a^2+1$

$64a^4-16a^2+1 = 16a^2+1$

$64a^4-32a^2=0$

$32a^2(2a^2-1)=0$

$a_1^2=0$, $a_2^2=\frac{1}{2}$

$10a^2 = 2a^2+1-\sqrt{16a^2+1}$

$64a^4-16a^2+1 = 16a^2+1$

$D = -8a^2+1$, $\sqrt{D} = \sqrt{-8a^2+1}$

$5 = \frac{2a^2+1 \mp \sqrt{-8a^2+1}}{2a^2}$

$(8a^2-1)^2 = -8a^2+1$

$64a^4-8a^2=0$

$8a^2(8a^2-1)=0$

$a^2=\frac{1}{8}$

$710+21+240+270+24+24+$

$+300+21+24+10+35$

$=1230+69+300+90=$

$=1530+159=$

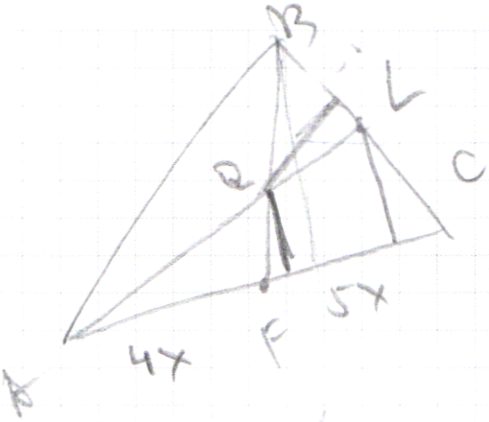
$=1699$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$1:25$, $S_{Anx} : S_{BQL}$