МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР 5-015

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.

3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе кторого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 4?

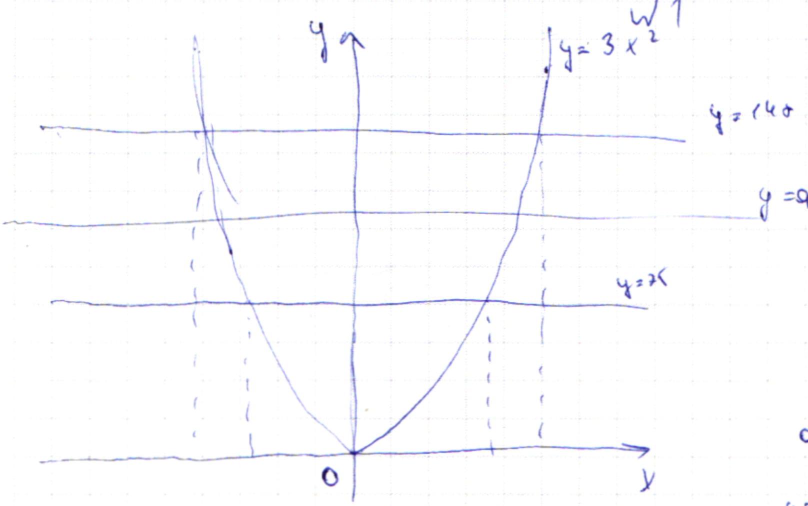
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $4 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.

7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



Парабола $y = 3x^2$ пересекает каждую из прямых в двух точках, при этом эти точки симметричны относительно O_y, т.к. парабола $y = 3x^2$ симметрична относительно O_y. Например, парабола пересекает прямую $y = 147$ в т. x_1 и $-x_1$.

Это означает, что длина отрезка, отсекаемого параболой на каждой из прямых равна $2x_i$, где x_i – x-координата точки пересечения параболы с i-й прямой, расположенная правее по оси O_x. Найдём длины этих отрезков для прямых $y = 147$ и $y = 75$, подставив 147 и 75 в уравнение параболы вместо y:

$147 = 3x^2$;

$49 = x^2$;

$x = 7$ или $x = -7$;

Длина отрезка – $2 \cdot 7 = 14$.

$75 = 3x^2$;

$25 = x^2$;

$x = 5$ или $x = -5$;

Длина отрезка – $2 \cdot 5 = 10$.

Теперь выразим длину отрезка для прямой $y = a$:

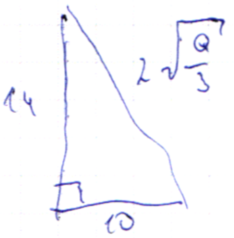
$a = 3x^2$;

$\frac{a}{3} = x^2$;

$x = \sqrt{\frac{a}{3}}$ или $x = -\sqrt{\frac{a}{3}}$,

длина отрезка – $2 \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$.

Получились отрезки со следующими длинами: 14, 10 и $2\sqrt{\frac{a}{3}}$.
Из них необходимо составить прямоугольный треугольник. При этом $2\sqrt{\frac{a}{3}}$ может быть катетом или гипотенузой. Рассмотрим два случая:



$\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 = 14^2 + 10^2;$

$\frac{4a}{3} = 296;$

$\frac{a}{3} = 74;$

$a = 222.$

$14^2 = \left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 + 10^2;$

$96 = \frac{4a}{3};$

$24 = \frac{a}{3};$

$a = 72.$

Значит, из отрезков, отсекаемых параболой $y = 3x^2$ от прямых $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$ можно составить прямоугольный треугольник при $a = 222$ и $a = 72$.

Ответ: 72 или 222.

№3

Пусть у Чиполлино альбом из l листов, и он имеет x марок.
Тогда запишем условие задачи через неравенства и равенства:

$22l < x$ — марки не влезут на листы, если клеить их по 22 на лист,

$26(l-1) \geq x$ — марки влезут в альбом, и даже 1 лист останется пустым (по крайней мере), если клеить их по 26 на лист

$x + 21l = 700$ — если к маркам Чиполлино добавить такой же альбом из l листов, в котором на каждом листе по 21 марке, то у него станет 700 марок.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Выразим x из последнего равенства и подставим его в неравенства:

$x = 700 - 21l$;

$22l < 700 - 21l$;

$43l < 700$;

$l < \frac{700}{43}$;

$l \le 16$ (т.к. $l \in \mathbb{N}$).

$26l - 26 \ge 700 - 21l$;

$47l \ge 726$;

$l \ge \frac{726}{47}$;

$l \ge 16$ (т.к. $l \in \mathbb{N}$).

$$\begin{cases} l \le 16; \\ l \ge 16. \end{cases} \Rightarrow l = 16.$$

Значит, в альбоме Чиполлино 16 листов. Найдём кол-во марок:

$x = 700 - 21l = 700 - 21 \cdot 16 = 700 - 336 = 364$.

Значит, у Чиполлино есть 364 марки.

Ответ: 364.

№4

$|ax - 3a| \le \sqrt{x-1}$! $x - 1 \ge 0 \Rightarrow \boxed{x \ge 1}$!

Обе части неравенства всегда неотрицательны, значит, можем обе части возвести в квадрат:

$(|ax - 3a|)^2 \le x - 1$;

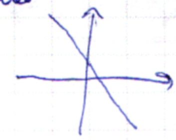
модуль можно убрать, т.к. $|a|^2 = a^2$

$(ax - 3a)^2 \le x - 1$;

$a^2x^2 + 9a^2 - 6a^2x \le x - 1$;

$a^2x^2 - 6a^2x - x + 9a^2 + 1 \le 0$.

Рассмотрим ф-ю $y=a^2x^2-6a^2x-x+9a^2+1$.

При $a=0$ ф-я представляет собой прямую $y=-x+1$: 

Решением неравенства $-x+1\le 0 \Rightarrow -x\le -1 \Rightarrow x\ge 1 \Rightarrow x\in[1;+\infty)$ не является отрезок длины 4, значит, $a\ne 0$.

Тогда, $a^2>0$, и график представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх:  . Тогда значение функции будет меньше либо равно 0 на отрезке между корнями включая их. Значит, модуль разности корней ур-я равен 4.

$y=a^2x^2-6a^2x-x+9a^2+1$;

$y=a^2x^2-(6a^2+1)x+9a^2+1$;

$D=(6a^2+1)^2-4a^2(9a^2+1)=(36a^4+1+12a^2)-36a^4-4a^2=$

$=8a^2+1$

$x_1=\dfrac{6a^2+1+\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}$

$x_2=\dfrac{6a^2+1-\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}$.

$x_1>x_2$, значит, $|x_1-x_2|=x_1-x_2$.

$x_1-x_2=4$;

$\dfrac{6a^2+1+\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}-\dfrac{6a^2+1-\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}=4$;

$\dfrac{\sqrt{8a^2+1}}{a^2}=4$; $a\ne 0$, поэтому можем домножить на a^2

$\sqrt{8a^2+1}=4a^2$; обе части положительны, возводим в квадрат:

$8a^2+1=16a^4$;

$16a^4-8a^2-1=0$;

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$[t = a^2]$

$16t^2 - 8t - 1 = 0;$

$D = 64 + 4 \cdot 16 = 2 \cdot 64 = 128 = (8\sqrt{2})^2$

$\cancel{t = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}}$

$t_1 = \frac{8 + 8\sqrt{2}}{32} = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$

$\cancel{a^2 = \frac{1}{4};}$

$t_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{4} < 0$ – невозможно.

$\cancel{a = \frac{1}{2} \text{ или } a = -\frac{1}{2}}$

Также, не забываем, что $l \geq 1$. Если мы подставим полученные значения a в формулу нахождения наименьшего корня, получим число ≥ 1, значит, решение верное.

$a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{4};$

$a = \cancel{\sqrt{1+\sqrt{2}}}\ \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$ или $a = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$ или $-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$.

№ 5

Во-первых, у нас есть 12 вариантов разместить в числе 8 подряд идущих цифр „7". Тогда у нас остаётся 11 свободных позиций. На каждую из них мы можем поставить „2" или „5". Но при этом надо отсечь вариант, когда нет ни одной „2"-ки и „5"-ки. Значит, ответом будет

$12 \cdot (2^{11} - 2) = 12 \cdot (2048 - 2) = 12 \cdot 2046 = 24552.$

размещаем 8 подряд одинак. цифр „7"

11 цифр, на каждой – 2 варианта ставить „2" или „5"

отсекаем варианты, где нет ни одной двойки и ни одной пятёрки

Ответ: 24552.

№1

Разность 2-х чисел не делится на 25, если у них различные остатки от деления на 25. Значит, у всех чисел, выбранных Пиноккио, различные остатки от деления на 25. Нам необходима наименьшая сумма. Значит, выберем остатки от деления от 1 до 20 включительно. Именно такие остатки имеют 20 наименьших чисел из натурального промежутка. Обозначим наши 20 остатков $r_1 \dots r_{20}$. Все они являются различными числами от 1 до 20. Тогда:

$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5$ — сумма чисел ~~в первой группе~~ из 1-го промежутка

$r_6 + r_7 \dots + r_{10} + 5 \cdot 25$ — сумма чисел из 2-го промежутка

$r_{11} + \dots r_{15} + 5 \cdot 50$ — сумма чисел из 3-го промежутка

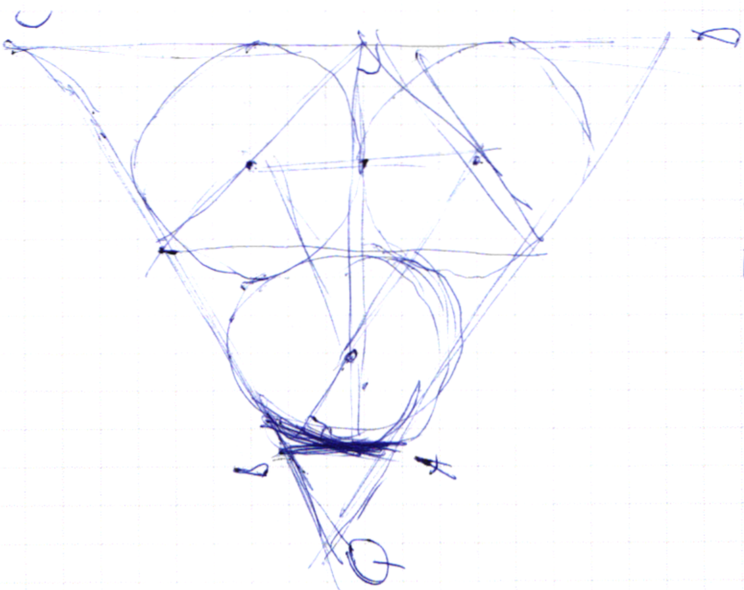
$r_{16} + \dots + r_{20} + 5 \cdot 75$ — сумма чисел из 4-го промежутка

Значит, сумма всех чисел равна

$5 \cdot (75 + 50 + 25) + r_1 + r_2 + \dots + r_{20} = 5 \cdot 150 + 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = 750 + 210 = 960.$

Ответ: 960.

№2



Доведём AD и BC до пересечения в т. Q. $\triangle QCD$ равнобедренный. $AB \parallel CD$. Значит, $BCDA$ — трапеция.

$AB = x$. $AB + CD = AD + BC - 30$;

$x + CD = AD + BC - 30$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чтобы найти радиус, нужна высота трапеции.
Высота равна 60. Радиус равен 30.
Ответ: 30.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

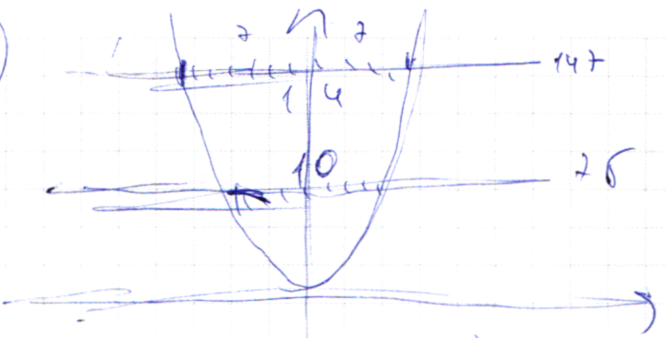
5-015

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1



$y = 3x^2;$

$147 = 3x^2;$

$49 = x^2;$

$x = 7$

$75 = 3x^2;$

$25 = x^2;$

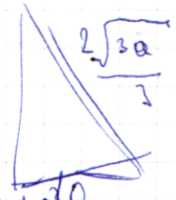
$x = 5$

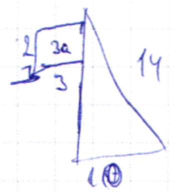
$a = 3x^2;$

$\frac{a}{3} = x^2;$

длина 3-го отр.: $2\sqrt{\frac{a}{3}} =$

$\frac{2\sqrt{3a}}{3}$





$\left(2\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 = 14^2 + 10^2;$

$\frac{4a}{3} = 196 + 100;$

$\frac{4a}{3} = 296;$

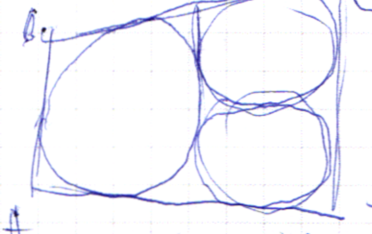
$\frac{a}{3} = 74;$ $a = 3 \cdot 74 = 222$

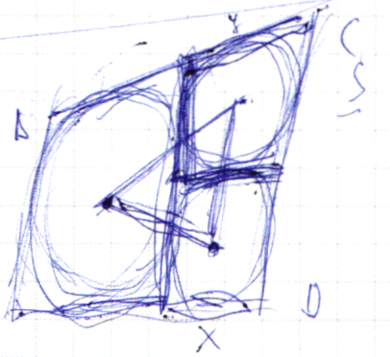
$74 \cdot 4;$

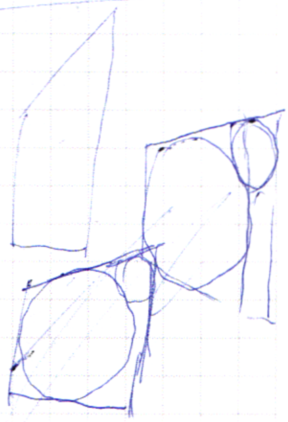
$\frac{300}{4} = 25 \cdot 3 = 75$

700 | 43, 16; −43, 270, −258

2







$22l < x$

$26(l-1) \geq x$

$21l + x = 700;$

$43l < 700;$

$47l \geq 726;$

$l < \frac{700}{43};$

$l \leq 16.$

кол-во шагов: 16.

$x = 700 - 21 \cdot 16 =$

$x = 700 - 21l$

$22l < 700 - 21l;$

$43l < 700;$

$26(l-1) \geq 700 - 21l;$

$26l - 26 \geq 700 - 21l;$

$47l \geq 726;$

$l \geq \frac{726}{47};$

$l > 15$

43 · 16 = 688; 246

726 | 47, 15; −47, 256, −235, 21

21 · 16 = 126 + 21 = 246

700 − 336 = 364

$1 + 2 + 3 + 4 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 <$

$1 + 2 + 3 + 4 + 25 +$
$+ 31 + 32 + 33 + 34 + 35 +$
$+ 1 \dots 20$

21 · 16 = 126 + 21 = 336

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x-1\geq 0;$ $\boxed{x\geq 1}$

$f=a^2$

$a\neq 0.$

$|ax-3a|\leq\sqrt{x-1}$

$a^2x^2+9a^2-6a^2x\leq x-1;$

$(ax-3a)^2\leq x-1;$ $a^2x^2-6a^2x-x+9a^2+1\leq 0;$

$(a^2)x^2-(6a^2+1)x+(9a^2+1)\leq 0;$

$(f)x^2-(6f+1)x+(9f+1)\leq 0;$

$x_1-x_2=4.$

$|0{,}5x-1{,}5|\leq\sqrt{x-1}$

$D=36f^2+12f+1-4(9f^2+f)$ $x_1+x_2=\frac{6f+1}{f}$ $x_1x_2=\frac{9f+1}{f}$

$19-8=11.$

$D=36f^2+12f+1-36f^2-4f=$ $x_1-x_2=4$ $x_1+x_2=6+\frac{1}{f}$

$=12f-4f+1=8f+1=8a^2+1$ $x_1x_2=9+\frac{1}{f}$

$x_1-x_2=4$

$X_1=\frac{6a^2+1+\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}$

$12\cdot 2^{11}$ 12 $12\cdot 11$

$X_2=\frac{6a^2+1-\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}$

имеет одновр. ест. и дк. мног.

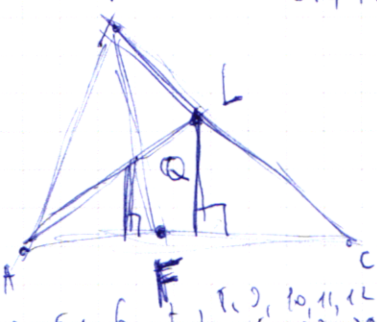
$12\cdot 2^{11}$ $12\cdot 2046=$

$\frac{6a^2+1+\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}-\frac{6a^2+1-\sqrt{8a^2+1}}{2a^2}=4;$

$12\cdot(2^{11}-2)$ $=20460+4092=$

$=24000+460+92=$

$24500+52=24552.$ $\frac{\sqrt{8a^2+1}}{a^2}=4;$



$1+2+3+4+5+$

$\sqrt{8a^2+1}=4a^2;$

$8a^2+1=16a^4;$

$16a^4-8a^2+1=0$

$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$

$76+77+78+79+80=5\cdot 70+(6+7+8+9+10)$ $D=64-4\cdot 16=0.$

$56+57+58+59+60=5\cdot 50+(6+7+8+9+10)$ $f=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

$36+37+38+39+40=5\cdot 30+(6+7+8+9+10)$

$16+17+18+19+20=5\cdot 10+(6+7+8+9+10)$ $a_1=\frac{1}{2}$ $a_2=-\frac{1}{2}.$

$160\cdot 5+4\cdot 40=160\cdot 6=960$

$1+2+3+4+5$ $(1+2+3+4+5)$

$31+32+33+34+35$ $5\cdot 30+(1+2+3+4+5)$ $5\cdot 180+4\cdot 15=5\cdot 180+60=$

$61+62+63+64+65$ $5\cdot 60+(1+2+3+4+5)$

$5+125+250+$ $3\cdot 5=$ 960.

$91+92+93+94+95$ $5\cdot 90+(1+2+3+4+5)$ $150+190=960.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-015

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|0{,}5x-1{,}5|\le\sqrt{x-1};$

$y=a^2x^2-(6a^2+1)x+9a^2+1$

$y=\frac{x^2}{4}-(1{,}5+1)x+\frac{9}{4}+1;$

$\frac{x^2}{4}-2{,}5x+\frac{13}{4}\le 0;$

$x^2-10x+13\le 0$

$D=100-4\cdot 13=100-52=48=4\cdot 12=8\cdot 6=16\cdot 3=(2\sqrt3)^2$

$x_1=\frac{10+2\sqrt3}{2}=5+\sqrt3$

$x_2=5-\sqrt3.$

$$\frac{\frac{5(1+\sqrt2)}{4}+1-\sqrt{8\cdot\frac{(1+\sqrt2)}{4}+1}}{\frac{1+\sqrt2}{2}}=$$

$$=\frac{1{,}5+1{,}5\sqrt2+1-\sqrt{2+2\sqrt2+1}}{0{,}5+\frac{1}{\sqrt2}}$$

$\frac{4+\sqrt5}{1}=$

$2046\cdot 12$: $4092+2046=24552$

$24552.$

$7_1\quad 1+2+3+4+5+6+7+8$

$5\cdot 150=750.$

$7_1\ldots 7_5\ +$

$+5\cdot 25+5\cdot 50+\ldots+7_1\ldots 7_5+7.$

$750+210=960$

700

210.

20	1	+ 10
40	2	+ 19
60	3	+ 17
80	4	+ 16
100	5	+ 15
120	6	+ 14
140	7	+ 13
160	8	+ 12

9+11 180

10+20 200

5·150

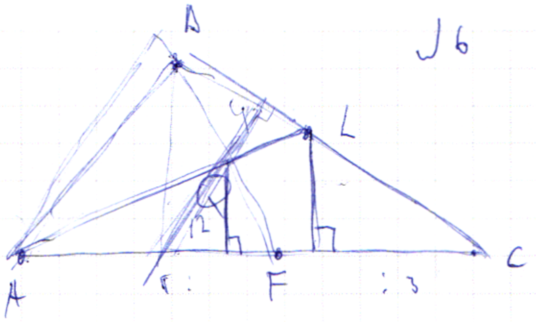
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6



$$\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{HF}{FC};$$

$$\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{5}{8}=1;$$

$$\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BQ}{QF}=\frac{8}{5}$$