

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР

11-006

Заполняется ответственным секретарем

1. ✓ Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.
3. ✓ Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры "2", "5" и "7" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "7" ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 3x^2$$

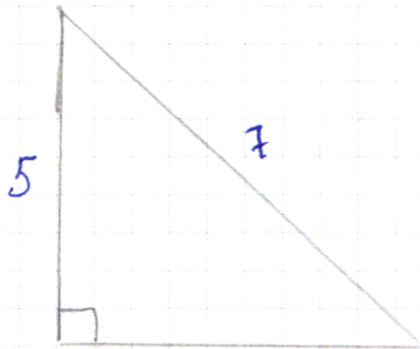
$$y = 147; \quad y = 75; \quad y = a;$$

$$3x_1^2 = 147 \quad 3x_2^2 = 75 \quad 3x_3^2 = a$$

$$x_1^2 = 147 : 3 \quad x_2^2 = 75 : 3 \quad x_3^2 = \frac{a}{3}$$

$$x_1^2 = 49 \quad x_2^2 = 25 \quad x_3 = \sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$x_1 = 7 \quad x_2 = 5$$



$$7^2 = \left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^2 + 5^2$$

$$49 = \frac{a}{3} + \frac{3}{25}$$

$$\frac{3}{49} = \frac{a+75}{3}$$

$$147 - 75 = a$$

$$a = 72$$

$$\sqrt{\frac{a}{3}} = \sqrt{\frac{72}{3}} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Ответ: $a = 2\sqrt{6}$;

№3

21 марка — 1 лист

700 марка — X лист

$$X = \frac{700 \cdot 1}{21} = 33 \frac{1}{3} \text{ лист альбома}$$

$$33 \frac{1}{3} - 1 = 32 \frac{1}{3} \text{ лист}$$

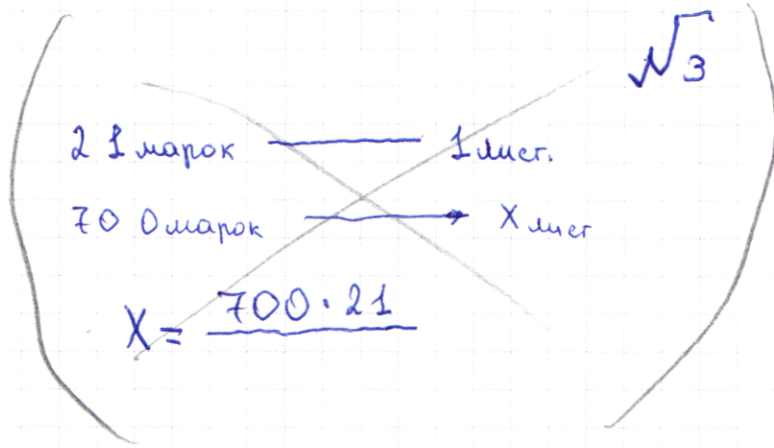
26 марка — 1 лист

X марка — $32 \frac{1}{3}$ лист

$$X = \frac{\frac{97}{3} \cdot 26}{1} = \frac{2422}{3} = 807 \frac{1}{3} \text{ марка}$$

Ответ: $807 \frac{1}{3}$ марка

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№7

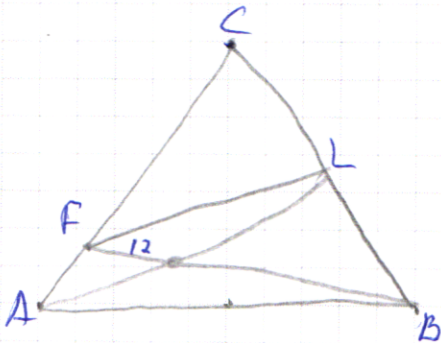
[1; 25], [26; 50] ... [476; 500].

$$25 - 1 = 24$$

$$24 \cdot 500 = 12000 \text{ мешков}$$

Ответ: 12000 мешков

№6.



N₄

$$\begin{aligned} |ax - 3a| &\leq \sqrt{x-1} \\ (|ax - 3a|)^2 &\leq (\sqrt{x-1})^2 \\ a^2x^2 - 3a^2x - 3a^2x + 9a^2 &\leq (\sqrt{x-1})^2 \\ a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 &\leq x-1 \\ a^2(x^2 - 6x + 9) &\leq x-1 \\ a^2(x-3)(x-3) &\leq x-1 \end{aligned}$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-3)(x-3)}$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-3)^2}$$

$$a \leq \sqrt{\frac{x-1}{(x-3)^2}}$$

$$a \leq \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$$

$$\text{Ответ: } a \leq \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$(|ax - 3a|)^2 \leq (\sqrt{x-1})^2$$

$$(ax - 3a)(ax - 3a) \leq x - 1$$

$$a^2 x^2 - 3a^2 x - 3a^2 x + 3a^2 \leq x - 1$$

$$a^2 x^2 - 6a^2 x + 3a^2 \leq x - 1$$

$$a^2 (x^2 - 6x + 3) \leq x - 1$$

$$a^2 (x-3)(x-3) \leq x-1$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-3)(x-3)}$$

$$a \in \sqrt{\frac{x-1}{(x-3)(x-3)}} \quad x \neq 3$$

√

$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$(|ax - 3a|)^2 \leq (\sqrt{x-1})^2$$

$$a^2 x^2 - 3a^2 x - 3a^2 x + 3a^2 \leq x - 1$$

$$a^2 x^2 - 6a^2 x + 3a^2 \leq x - 1$$

$$a^2(x^2 - 6x + 3) \leq x - 1$$

$$a^2(x-3)(x+3) \leq x-1$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-3)(x+3)}$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-3)^2}$$

$$a \leq \frac{\sqrt{x-1}}{x-3} \quad x \neq 3$$

$\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x-3} \right)$

~~Ответ: $a \leq \frac{\sqrt{x-1}}{x+3}$~~

~~Ответ: $a \leq \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 3x^2$$

$$3x_1^2 = 147$$

$$x_1^2 = 147 : 3$$

$$x_1^2 = 49$$

$$x_1 = 7$$

$$y = 147;$$

$$3x_2^2 = 75$$

$$x_2^2 = 75 : 3$$

$$x_2^2 = 25$$

$$x_2 = 5$$

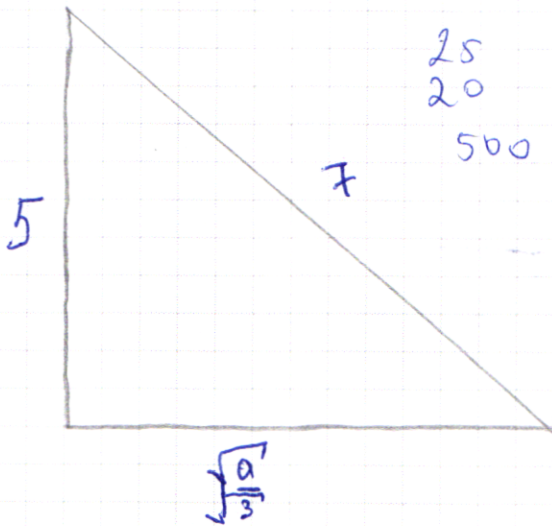
$$y = 75; \quad y = a;$$

$$3x_3^2 = a$$

$$x_3^2 = \frac{a}{3}$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$\frac{500}{24} = 20\frac{25}{6}$$



$$\frac{25}{20}$$

$$500$$

$$[1; 25], [16; 50], \dots, [476; 500]$$

$$24 \cdot 25 =$$

№4

$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$
$$(|ax - 3a|)^2 \leq (\sqrt{x-1})^2$$
$$a^2x^2 - 3a^2x - 3a^2x + 9a^2 \leq x-1$$

$$a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 \leq x-1$$

$$a^2(x^2 - 6x + 9) \leq x-1$$

$$a^2(x-3)(x-3) \leq x-1$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-3)(x-3)}$$

$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-3)^2}$$

$$|a| \leq \frac{\sqrt{x-1}}{x-3} \quad x \neq 3$$

Ответ: $a \leq \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{1}$$

$$y = 3x^2$$

$$y = 147, \quad y = 75, \quad y = 9.$$

$$147 = 3x^2$$

$$75 = 3x^2$$

$$9 = 3x^2$$

$$x^2 = 147 : 3$$

$$x^2 = 75 : 3$$

$$x^2 = \frac{9}{3}$$

$$x^2 = 49$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{3}}$$

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = 5$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)