

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

11-016

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 5x^2$  пересекает прямые  $y = 125$ ,  $y = 80$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ . Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 28$ .
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$  является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 4 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 25$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 40]$ ,  $[41; 80]$ ,  $[81; 120]$ ,  $[121; 160]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Невозможно. Потому что должен  $y=80$  а  $x=5$   
 Ответ: невозможно

№ 4

$$|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$$

$$(|ax - a|)^2 \leq (\sqrt{x - 3})^2$$

$$a^2 x^2 - 2a^2 x + a^2 \leq x - 3$$

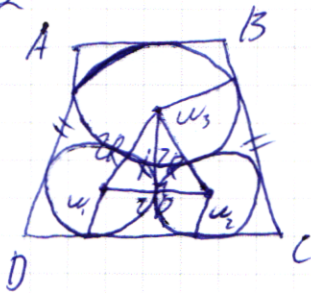
$$a^2(x^2 - 2x + 1) \leq x - 3$$

$$a^2(x - 1)^2 \leq x - 3$$

$$a^2 \leq \frac{x - 3}{(x - 1)^2}$$

$$a \leq \frac{\sqrt{x - 3}}{x - 1}$$

№ 2



$$w_1 = w_2 = w_3 = R$$

$$(2R)^2 = x^2 + R^2$$

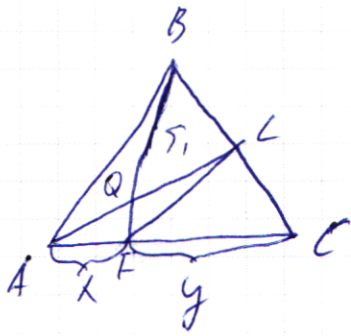
$$4R^2 = x^2 + R^2$$

$$x^2 = 3R^2$$

$$x = R\sqrt{3}$$

$$h = R\sqrt{3} + 2R = R(\sqrt{3} + 2)$$

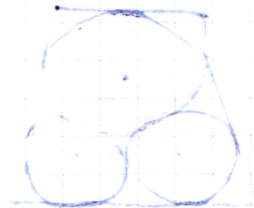
№ 6



$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{S_1}{S_{\text{треуг}}} = \frac{1}{25}$$

$$QF = 12$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|a(x-1)| \leq \sqrt{x-3}$$

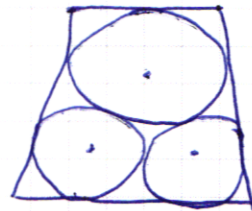
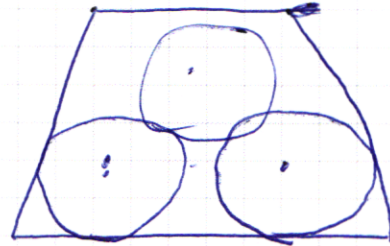
$$a^2 x^2 - 2a^2 x + a^2 \leq \sqrt{x-3}$$

$$a^2(x^2 - 2x + 1) \leq x - 3$$

$$a^2(x-1)^2 \leq x-3$$

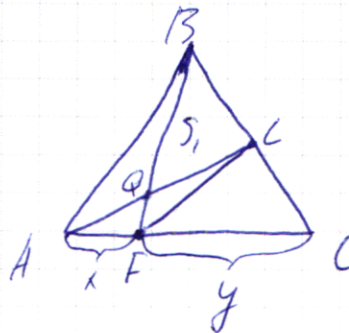
$$a^2 \leq \frac{x-3}{(x-1)^2} \quad a^2 \leq -\frac{1}{1}$$

$$a \leq \frac{x-3}{x-1^2} \quad a^2 \leq -1$$



$$\frac{x-3}{(x-1)^2} - a \geq 0$$

~~(x-1)~~



$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{S_1}{S_{\text{общ}}} = \frac{1}{25}$$

$$QF = 12$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_1 = 5 \quad x_2 = 4$

$$\begin{array}{r} 125 \\ - 80 \\ \hline 45 \end{array}$$

$y = 5 \cdot (3)^2$

$125 = 5x^2$

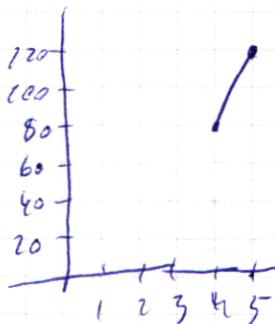
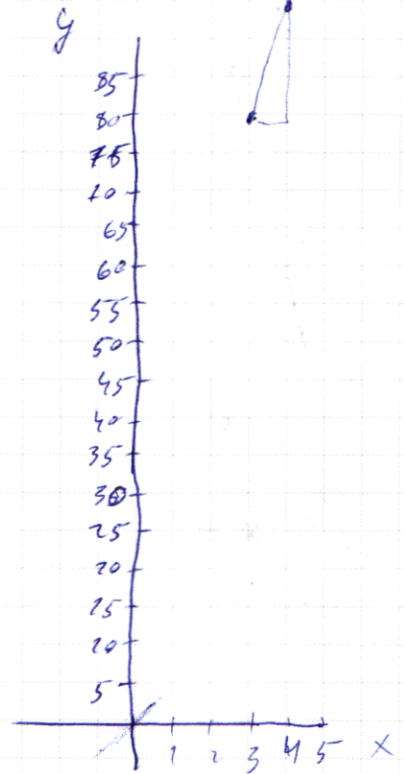
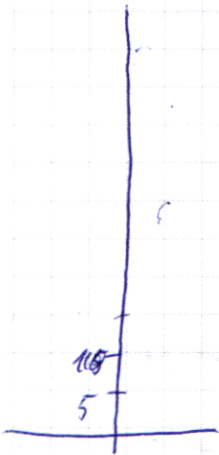
$25 = x^2$

$x = 5$

$80 = 5x^2$

$x = 4$

$80 = y = 80$



$a(x-1)$

$|ax-a| \leq \sqrt{x-3}$

$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq x-3$

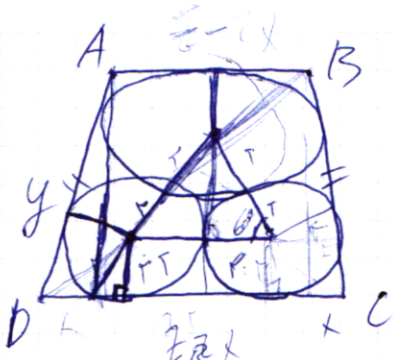
$a^2(x^2 - 2x + 1) \leq x-3$

$a^2 \leq \frac{x-3}{(x-1)^2}$

$a \leq \frac{\sqrt{x-3}}{x-1}$

$a^2 \leq (x-3)/(x-1)^2$

$a^2$

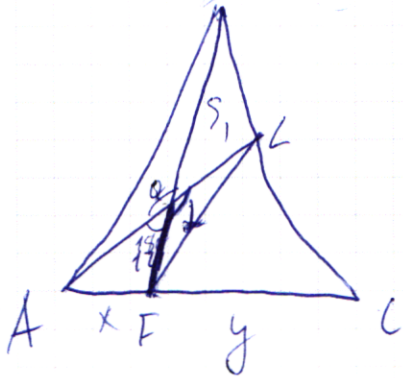


$$AD + BC - AB - CD = 28$$

$$2x - 2r = 28$$

$$4r^2 = 8r^2 - 4r^2 \cdot \frac{1}{r} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4}$$

$$h = r\sqrt{3} + 2r = r(\sqrt{3} + 2)$$



$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{4y}{5}$$

$$y^2 = 3r^2 + 4\sqrt{3}r^2 + 4r^2 + r^2$$

$$\frac{S_1}{S_{\text{osn}}} = \frac{1}{25}$$

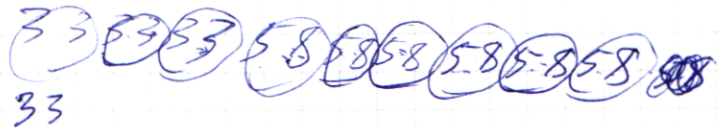
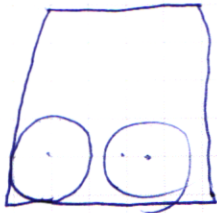
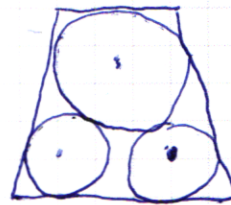
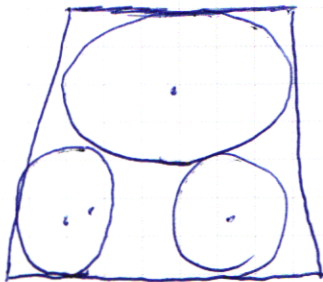
$$S_1 = \frac{S_{\text{osn}} \sqrt{2}}{25}$$

$$15x = 17x$$

$$\frac{36}{5} = \frac{180}{180}$$

$$6r^2 + 8\sqrt{3}r^2 + 8r^2 + r^2 + 2x - 2r = 28$$

$$r^2(14 + 8\sqrt{3}) + 2x(x+1) - 2r = 28$$



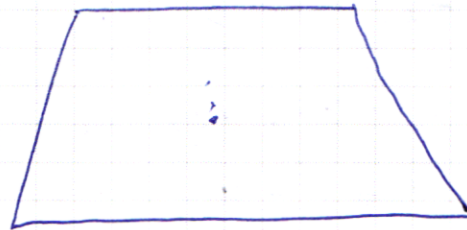
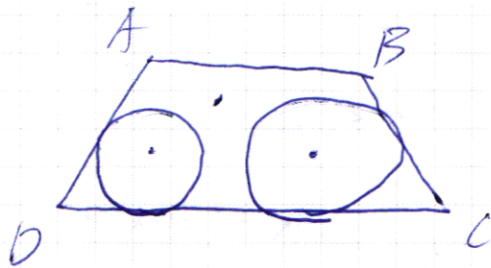
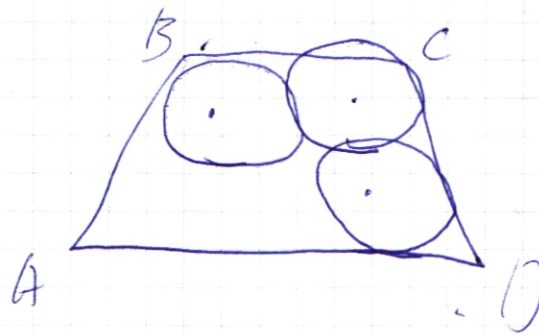
[1; 40]

1 3 4 5 6 7



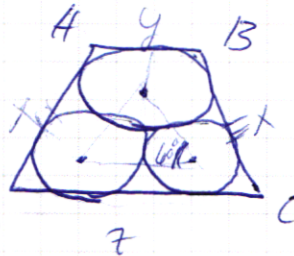
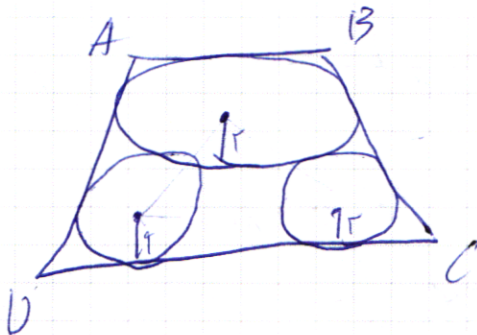
### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

15 - лист  
X лист



$$\begin{array}{r} 900 \overline{) 22} \\ 88 \quad 4, 9 \\ \underline{200} \\ 198 \\ \underline{198} \\ 0 \end{array}$$

$$AD + BC - AB - CD = 28$$



$$2x - y - z = 28$$

$$4r^2 = 8r^2 - 4r^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$4r^2 = 2r^2$$

$$4r^2 = 4r^2 - 2r^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$4r^2 = 4r^2 - 2r^2$$

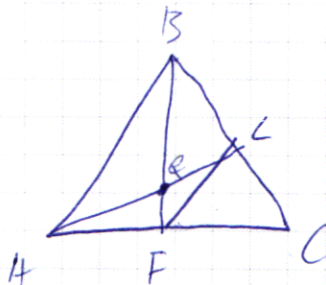
$$z = z$$

15x

17x

11 лист

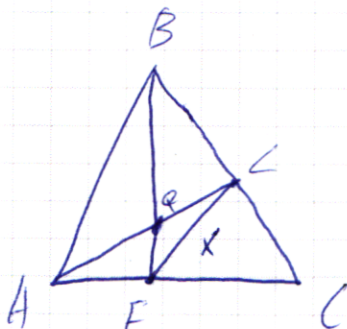
$$22x = 900$$



$$\frac{AF}{FL} = \frac{4}{5}$$

$$22x = 900$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 40 \\ \hline 100 \\ 88 \\ \hline 880 \end{array}$$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

3 3 3 3 3 3

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3}$$

$$|a(x-1)| \leq \sqrt{x-3}$$

$$a^2 x^2 - 2a^2 x + a^2 \leq x - 3$$

$$a^2(x^2 - 2x + 1) \leq x - 3$$

$$a^2(x-1)^2 \leq x-3$$

$$a^2 \leq \frac{x-3}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-1}{(x-1)^2}$$

$$a^2 \leq -x^2 + 3x - 4$$

$$a^2 \leq -1$$

-1

-1.43

$$-x^2 + 3x - 4 \pm 1$$

$$-4 + 6 - 4$$

$$-16 + 12 - 4$$

$$-1 + 3 - 4$$

$$-(x^2 + 3x + 4) = 0$$

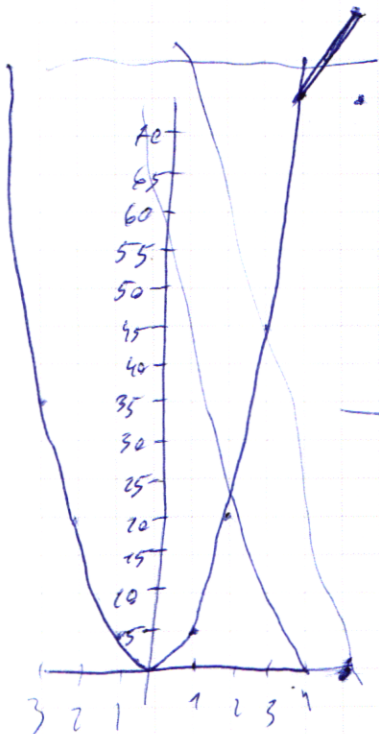
~~-1.43~~

$$(x-1)(x-4)$$

~~x^2~~

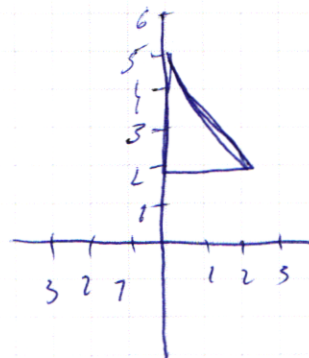
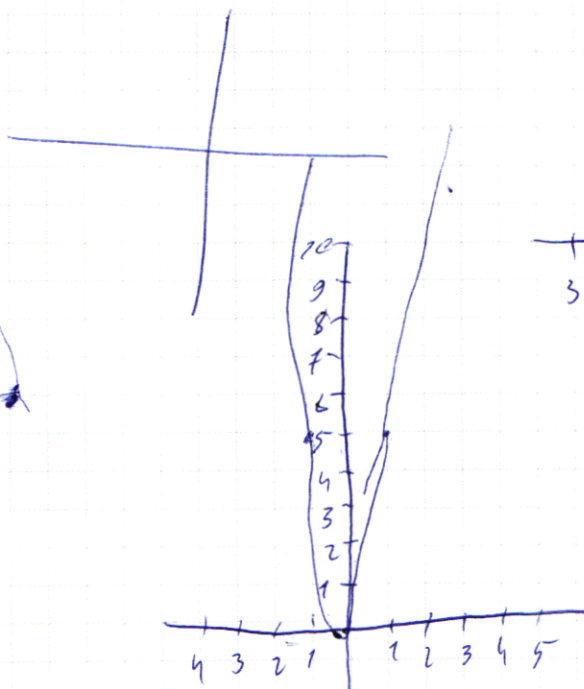
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & +4 & \\ \hline -1 & 1 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ 5 \\ \hline 80 \end{array}$$



1 5 5 5 3 3 3 5 8 5 8 5 8 5 8 5 8

~~3 3 3 3 3 5 8 8 5~~



~~X~~