

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

1-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 5x^2$  пересекает прямые  $y = 125$ ,  $y = 80$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ . Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 28$ .
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$  является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 4 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как 1 : 25. Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 40]$ ,  $[41; 80]$ ,  $[81; 120]$ ,  $[121; 160]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$d \in y = 125; \quad b \in y = 80$$

$$d = 2|x|; \quad b = 2|x|$$

$$x^2 = 25$$

$$|x| = 5$$

$$d = 10$$

$$x^2 = 16$$

$$|x| = 4$$

$$b = 8$$

Два треуг. (прямоуг.) при  $d$  и  $b$  - катеты;  
 $d$  - гипотенуза,  $b$  - катет.

Сторона  $c \in y = a$

$$\begin{cases} c = 2\sqrt{41} \\ c = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| = \sqrt{41} \\ |x| = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5(\sqrt{41})^2 = 205 \\ y = 5 \cdot 3^2 = 45 \end{cases}$$

Ответ:  $a = \{45; 205\}$ .

№ 5

Есть 12 цифр, на месте которых "5" или "8",  
т.е. вариантов  $2^{12} = 4096$ . Но известно, что  
каждая цифра встреч. хотя бы один раз.

Вариантов, в которых нет либо "5", либо "8" - 2.

$$4096 - 2 = 4094 \text{ варианта 12-знач. чисел.}$$

Ответ: 4094.

№ 3

$x \in \mathbb{N}$  - кол-во листов в альбоме  
(900 - 22x) - кол-во листов у чтеца

Известно, что:



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$15x < 900 - 22x < 17x$$

$$\begin{cases} 37x < 900 \\ 39x > 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 24 \frac{12}{37} \\ x > 23 \frac{1}{13} \end{cases}$$

Т.к.  $x \in \mathbb{N}$ , то  $x = 24$

Значит, что  $y$  Число было

$$900 - 22 \cdot 24 = 900 - 528 = 372 \text{ марки}$$

Ответ: 372 марки.

№7

Естественно, чтобы получить камни средней, велики  
взять камни, в числе из промежутков

Из 1 до : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Чтобы разность не делалась на 6, в каждой  
следующем промежутке надо пропускать  
первые 6-н числа этого пром.

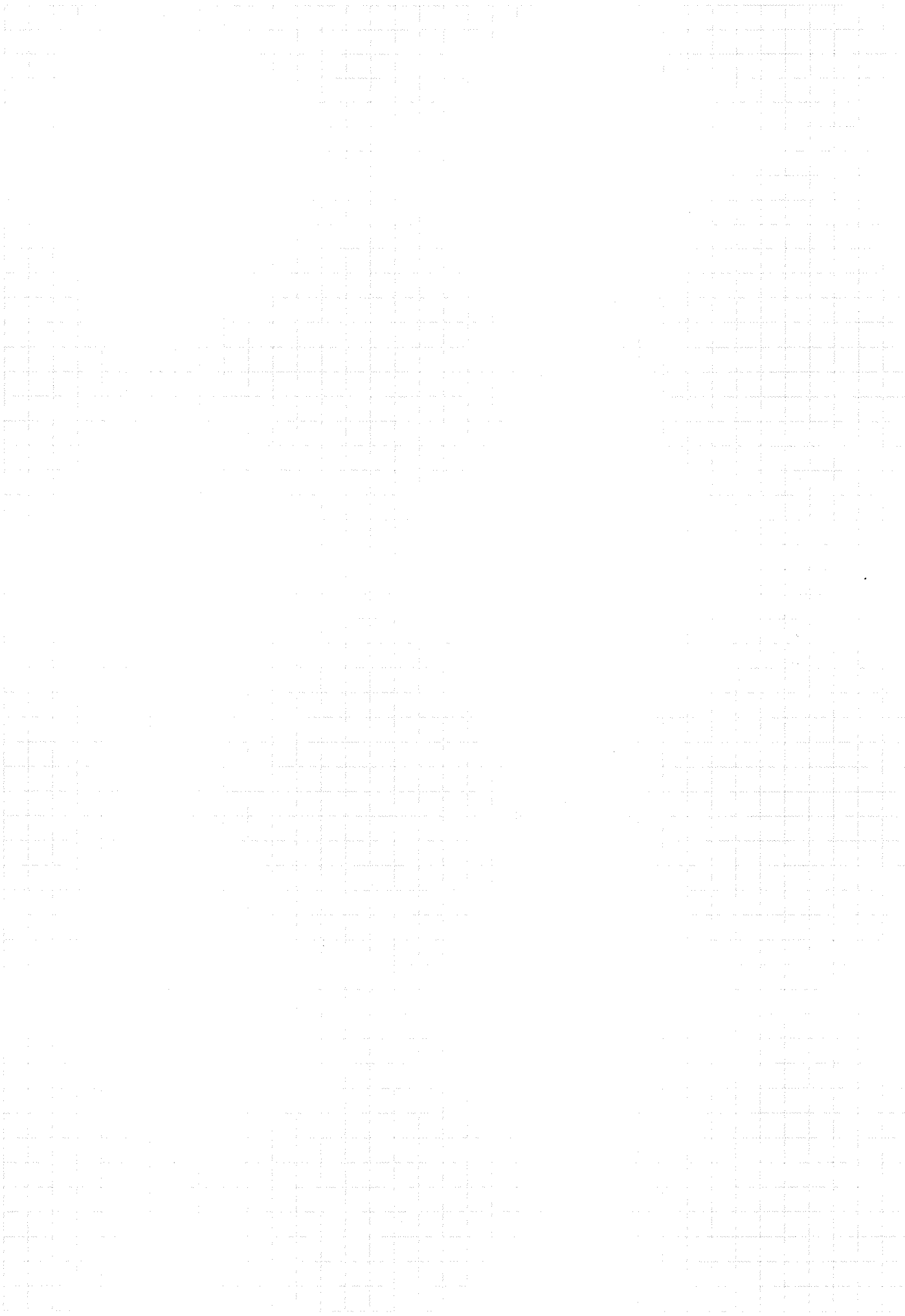
Т.е. где  $n$  - номер промежутка.  
Т.е. в 1 6-0, в 2 6, в 3 12, в 4 18.

$$\begin{aligned} \text{Итого: } \Sigma &= (1+2+3+4+5+6) + 40 \cdot 6 + (7+8+9+10+11+12) + \\ &+ 80 \cdot 6 + (13+14+15+16+17+18) + 120 \cdot 6 + \\ &+ (19+20+21+22+23+24) \text{ или если } 1+2+3+4+5+6=y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= y + 40 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + y + 80 \cdot 6 + 12 \cdot 6 + y + 120 \cdot 6 + \\ &+ 18 \cdot 6 + y = 4y + 6(40+6+80+12+120+18) = \\ &= 4y + 6 \cdot 276 = 4y + 1656 \end{aligned}$$

$$y = 21, \text{ т.е. } \Sigma_{\text{камн.}} = 84 + 1656 = 1740$$

Ответ: 1740.



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3}$$

если  $x=4$ :

$$6|a| \leq 2$$

$$|a| \leq \frac{1}{3}$$

$$a \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

Если  $a \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ , то неравенство имеет решение  $|2|$ .

$$\text{Ответ: } a \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





2-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

--	--	--



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{42} \\ |x| = 3 \end{cases}$$

$$\sqrt{36} = 6 = |x|$$

$$\sqrt{164} = 2\sqrt{41} = |x|$$

1656

1200  
400  
80

$$y = 45$$

$$y = 205$$

$$9a^2 \leq 9a^2$$

$$|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$$

$$a^2 x^2 + a - 2a^2 x - x + 3 \leq 0$$

$$21a - 2 = 4094$$

~~329~~

$$a^2 x^2 - x(2a^2 + 1) + a + 3 \leq 0$$

$$15x < 900 - 22x$$

$$37x < 900$$

$$x < \frac{900}{37} = 24 \frac{12}{37}$$

$$17x > 900 - 22x$$

$$39x > 900$$

$$x > \frac{900}{39} = 23 \frac{1}{13}$$

$$24 \frac{12}{37} > x > 23 \frac{1}{13}$$

$x \in 24$   
24 места

м.к.

$x \in \mathbb{Z} \cap (N)$   
в автомобиле

$$900 - 22 \cdot 24 = 900 - 528 = 372 \text{ марки}$$

$$4a^2(a-2)(a+1) + 1$$

$$\frac{1 \pm 3}{2} = 2; -1$$

$$x-2 \leq \sqrt{x-3}$$

