МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР 11-020

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2$ пересекает прямые $y = 147$, $y = 75$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 30$.

3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе кторого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 3a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 4?

5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры “2”, “5” и “7” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “7” ровно восемь, и они идут подряд.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $4 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.

7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$3x_1^2=147$ $\qquad$ $3x_2^2=75$

$x_1^2=49$ $\qquad$ $x_2^2=25$

$x_1=\pm 7$ $\qquad$ $x_2=\pm 5$

$d=14$ $\qquad$ $b=10.$

$a_1=\sqrt{d^2+b^2}=\sqrt{196+100}=\sqrt{296}=2\sqrt{74}$

$a_2=\sqrt{d^2-b^2}=\sqrt{196-100}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

Ответ: $2\sqrt{74}$ и $4\sqrt{6}$

№4

$|ax-3a|\le\sqrt{x-1}.$

$a^2(x-3)^2\le x-1 \quad (x\geqslant 1)$

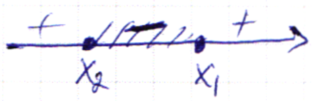
$a^2x^2-6a^2x+9a^2-x+1\le 0.$

$a^2x^2-(6a^2+1)x+9a^2+1\le 0.$

$D=\cancel{36a^4}+12a^2+1-\cancel{36a^4}-4a^2=8a^2+1.$

$x_{1,2}=\dfrac{6a^2+1\pm\sqrt{8a^2+1}}{a^2}$

~~$|x_1-x_2|$~~



$x_1-x_2=\dfrac{2\sqrt{8a^2+1}}{a^2}=4$

$16a^4=32a^2+4$

$4a^4-8a^2-1=0.$

$\dfrac{D}{4}=16+4=20.$

$a^2_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{20}}{4}=1\pm\dfrac{\sqrt5}{2}.$

$a_2^2<0$ – п.к.; $a^2=1+\frac{\sqrt5}{2}$; $a=\sqrt{1+\frac{\sqrt5}{2}}$; Ответ: $\sqrt{1+\frac{\sqrt5}{2}}$

№5

~~При зафиксированном положении восьми "7" по правилу произведения существует $2^{19-8-1} \cdot 1 = 2^{10}$ вариантов. Восемь "7" могут быть расположены только в 19-7=11 местах. Тогда общее кол-во таких чисел: $11 \cdot 2^{10} = 11 \cdot 1024 = 11264$~~

~~Ответ: 11264~~

№7

~~Если разность никаких двух не делится на 5, то все выбранные числа не делятся на 5. Значит достаточно выбрать из каждого промежутка 5 минимальных чисел не делящихся на 5.~~

~~$1+2+3+4+6=16$~~

~~$26+27+28+29+31=141$~~

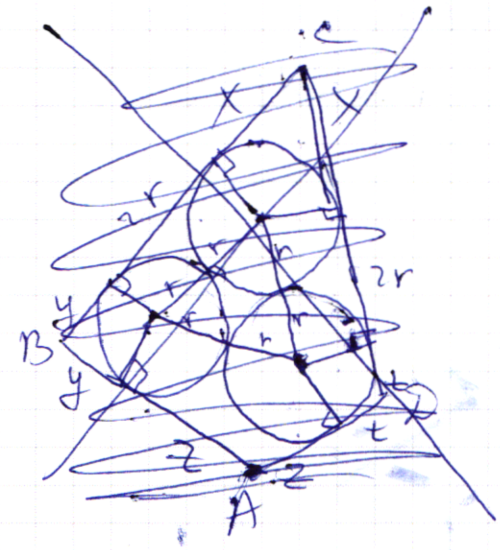
~~$51+52+53+54+56=266$~~

~~$76+77+78+79+81=391$~~

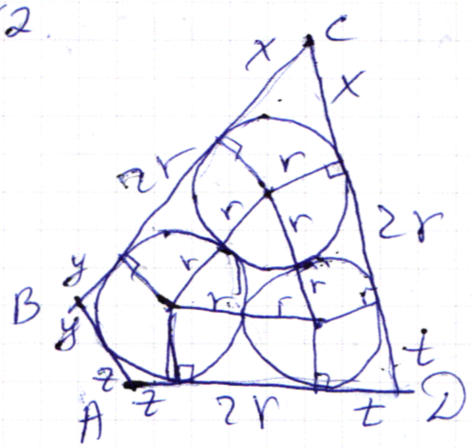
~~$391+266+141+16=814$~~

~~Ответ: 814.~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№2



$$\cancel{z}+2r+\cancel{t}+\cancel{y}+\cancel{2r}+\cancel{x}-\cancel{y}-\cancel{z}-\cancel{x}-\cancel{2r}-\cancel{t}=30$$

$$2r=30$$

$$r=15$$

Ответ: 15

№3

x – кол-во марок у Чиполлино.

k – кол-во мест в альбоме

$$\begin{cases} x>22k \\ x\leq 26(k-1) \\ x+21k=700 \end{cases}$$

$700-21k>22k \Rightarrow k<16\frac{12}{43}$

$700-21k\leq 26(k-1) \Rightarrow k\geq 14\frac{16}{47}$

Т.к. $k\in \mathbb{Z}$, то $15\leq k<16 \Rightarrow k=15$

$x=700-21\cdot 15=385$

Ответ: 385.

№7.

Чтобы найти минимальную сумму нужно сначала выбрать 5 первых чисел из последнего промежутка, а далее минимальные числа удовлетворяющие условию задачи из 3, 2 и 1 промежутка.

$76+77+78+79+80=390$

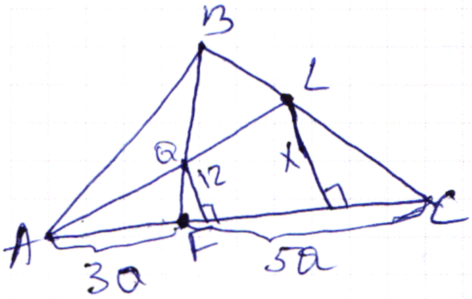
$56+57+58+59+60=290$

$36+37+38+39+40=190$

$21+22+23+24+25=115$

$390+290+190+115=985$

Ответ: 985



№6

$S_{AQF}=\frac{12\cdot 3a}{2}=18a$

$S_{ALC}=\frac{8ax}{2}=4ax$

$S_{ABF}=\frac{3}{8}\cdot 25S=\frac{75}{8}S$

$S_{BCF}=\frac{5}{8}\cdot 25S=\frac{125}{8}S$

$S_{BQL}=4S$

$S_{FQLC}=\frac{125}{8}S-4S=\frac{93}{8}S=4ax-18a=2a(2x-9)$

$2x-9=\frac{93S}{16a}$

$x=\frac{93S}{32a}+4{,}5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

При зафиксированной позиции восьми "7" кол-во чисел по правилу произведения $2^{11}-2=2(2^{10}-1)$. Восемь "7" могут находиться только в $19-8=11$ позициях. Тогда общее кол-во чисел $11\cdot 2(2^{10}-1) = 22(2^{10}-1)=22\cdot 1023=22506$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

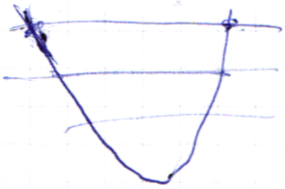
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-020

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$3x^2=147$

$x^2=49;\ x=\pm 7.$

$3x^2=75;\ x^2=25;\ x=\pm 5$

$a=14;\ b=10.$ $\cancel{z}+2r+\cancel{t}+\cancel{y}+2r+\cancel{x}-2r-\cancel{x}-\cancel{t}-\cancel{y}-\cancel{z}=30$

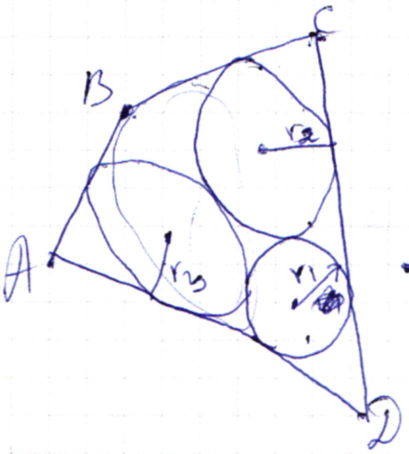
$c=\sqrt{a^2+b^2}$

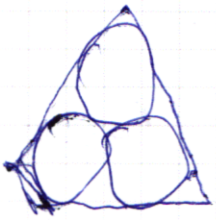
$r=15.$

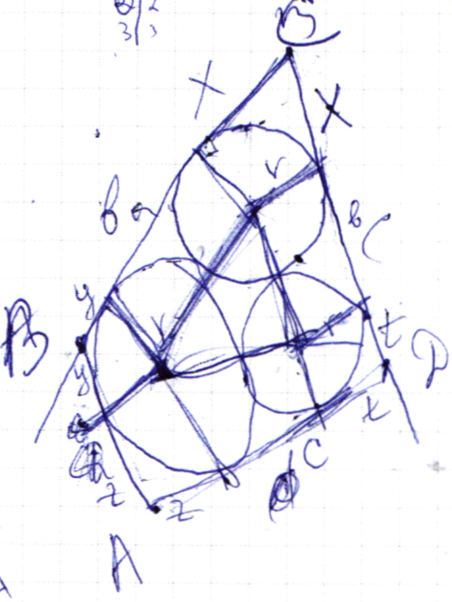
14
14
56
14
196

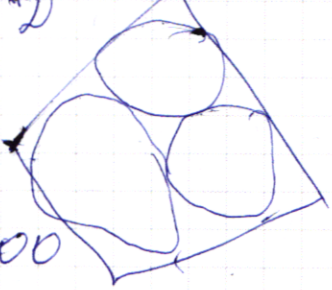
296	2
148	2
74	2
37	

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3









$22k < x$

$\begin{cases} 26(k-1) \geq x \\ x+21k=700 \end{cases}$

$x+21\left(\frac{x}{26}+1\right)=700.$

$\frac{47}{26}x=679$

$x=\frac{679\cdot 26}{47}$

$AD+BC-AB-CD=30$

$d+b-a-c=30.$

$26k-26 \geq 700-21k.$

$5k \geq 674$

$k \geq 134{,}8$

$k=135;\ x=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|ax-3a| \le \sqrt{x-1}$

$a^2(x-3)^2 \le x-1$

$a^2x^2-6a^2x+9a^2-x+1 \le 0.$

$a^2x^2-(6a^2+1)x+9a^2+1 \le 0. \quad (x \ge 1)$

$D=(6a^2+1)^2-4a^2(9a^2+1)=\cancel{36a^4}+12a^2+1-\cancel{36a^4}-4a^2=8a^2+1$

$x_{1,2}=\frac{6a^2+1 \pm \sqrt{8a^2+1}}{a^2}$

$x_1-x_2=\frac{2\sqrt{8a^2+1}}{a^2}=4$

$16a^4=32a^2+4$

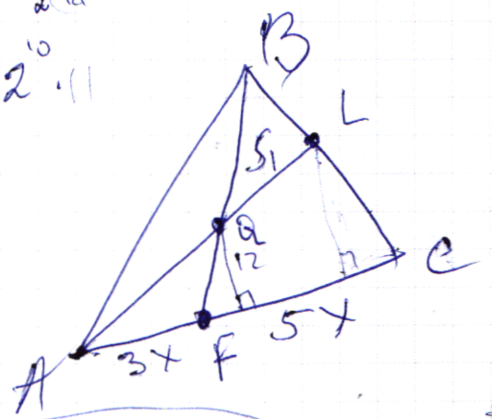
$4a^4-8a^2-1=0.$

$\frac{D}{4}=16+4=20.$

$a_{1,2}=\frac{4\pm 2\sqrt5}{4}=1\pm\frac{\sqrt5}{2}.$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ 1024 \\ \hline 1264 \end{array}$$

$x_1=\cancel{\frac{6a^2+1}{a^2}}+\frac{\sqrt{8a^2+1}}{a^2}=6$



$\frac{AF}{FC}=\frac{3}{5}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{BQL}}=\frac{25}{4}$

$6+7+8+9+1=31$

$\cancel{1+2+3+4+6}=16.$

$26+27+28+29+31=141$

$51+52+53+54+56=266.$

$x>22k$

$x \le 26(k-1)$

$x+21k=700$

$22k<700-21k \le 26k-26$

$k<\frac{700}{43}; \quad k \ge \frac{674}{47}$

$k<16\frac{12}{43} \quad k \ge 14\frac{16}{47}$

$k<16; \quad k \ge 15.$

$\frac{270}{43}=6\frac{12}{43}$

$\frac{204}{47}=4\frac{16}{47}$

$$\begin{array}{r} 391 \\ 266 \\ 141 \\ 16 \\ \hline 814 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ 4 \\ \hline 188 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 21 \\ \hline 15 \\ 30 \\ \hline 315 \end{array}$$

$700-315=385.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

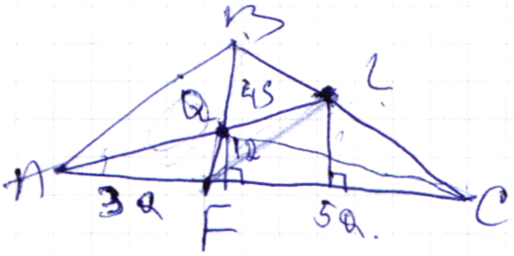
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-020

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{4}{25}$

$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$

$125-32=93$

$S_{AQF} = 18a.$

$S_{ACL} = 4aX$

$125-32$

$25S \cdot \frac{3}{8} = \frac{75}{8}S;$

$25S\frac{5}{8} = \frac{125}{8}S$

$S_{AQB} = \frac{75}{8}S - 18a.$

$4ax - 18a = \left(\frac{125}{8} - 4\right)S$

$2a(2x-9) = \frac{93}{8}S$

$S_{ALC} = 21S + 18a$

$\cancel{\frac{125+18a}{8}}$

$4ax = 18a$

$76+77+78+79+80.$

$80-25=55$

$56+57+58+59+60$

$1023 \cdot 22$

2046

2046

22506

~~26+27+28+29+30~~

$36+37+38+39+40.$

$21+22+23+24+25$

$+4$

$6+7+8+9+10=40$

16

350

$2+3+4+5=45.$

$700+270+15=985.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)