

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

5-008

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 5x^2$  пересекает прямые  $y = 125$ ,  $y = 80$  и  $y = a$ , отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ . Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 28$ .
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$  является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 4 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 25$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 40]$ ,  $[41; 80]$ ,  $[81; 120]$ ,  $[121; 160]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.  $22x$ ,  $x$  - листов в альбоме;  $y$  - листов первого.

$$15x < y$$

$$15x + z = y$$

$$17(x-1) = y + a$$

$$17(x-1) \geq y$$

$$y + 22x = 900$$

$$17(x-1) + 22x = 900$$

$$17x - 17 \geq y$$

$$y = 900 - 22x$$

$$39x = 917$$

$$17x - 17 \geq 15x$$

$$16x = 900 - 22x \quad x = \frac{917}{39}$$

$$2x > 17 \quad y = 17x - a = 900 = 38x$$

$$x > \frac{17}{2}$$

$$2x = z + a + 17$$

$$x = \frac{900}{39} = 20$$

$$39x - a = 917$$

$\frac{15}{\times 24} = 360$

$$17x \geq y + 17$$

$$(15x + 22x) \geq y + 17$$

$$y + 22x \geq y + 17$$

$$2x > 17$$

$$y = 24 + 15 + 12$$

$$x > \frac{17}{2}$$

$$15x + z + 22x = 900$$

$$y > 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5$$

$$y > 270$$

$$289 \geq y$$

$$f_c(15x; 17(x-1))$$

$$1817 = 76x + z - a$$

900	2	22 \cdot 17 = 39	3	40
450	2	13		
225	3	= 22 \cdot 16 + 22		
75	3	41		
25	5			
5	5			
1	5			

48	2	45	23
24	2	15	3
12	2	5	5
6	2	1	
3	3		
1			

50	2	37x + z = 900
25	5	
5	5	
1	5	

$$y + 22x = 45x$$

$$y = 23x$$

$$z = 26$$

$$16x + 22x + z = 900$$

$$38x + z = 900$$

$$340 - 17 = 323 \geq y$$

$$15x + z + 22x = 900$$

$$37x + z = 900$$

$$38(z + a + 17) + z - a = 1817$$

число марок машин, если наклеить по 15 марок на каждый лист;  $y = 15x + z$ ;  $y + 22x = 900$ ;  $15x + z + 22x = 900$ ;  $37x + z = 900$ ;

Число  $x$  и число  $z$  должны быть целыми, тогда  $x = 24$ , а  $z = 12$ , так как  $z < 37$ , значит, что  $y = 15 \cdot 24 + 12 = 360 + 12 = 372$  (марки)

Ответ: 372 марки.

4. Решение.

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3}; x=2;$$

$$|a| \leq \sqrt{-1}.$$

Ответ: не при каких значениях параметра  $a$ .

5. Решение.

$$\begin{aligned} & 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45+46+47+48+49+50+51+52+53+54+55+56+57+58+59+60+61+62+63+64+65+66+67+68+69+70+71+72+73+74+75+76+77+78+79+80+81+82+83+84+85+86+87+88+89+90+91+92+93+94+95+96+97+98+99+100 = \\ & = 200 + 15 + 103 + 87 + 88 + 89 + 230 + 183 + 414 + \\ & + 283 = 318 + 264 + 290 + 183 + 414 + 283 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-3} \quad |2x-2| \leq \sqrt{x-3}$$

$$(ax - a)^2 \leq |x-3| \quad (2x-2)^2 \leq |x-3|$$

$$a^2x^2 + a^2 - 2a^2x \leq |x-3|$$

$$a^2(x^2 + 1 - 2x) \leq |x-3| \quad 4x^2 + 4 - 8x \leq |x-3|$$

$$a^2(x-1)^2 \leq |x-3| \quad 4x^2 + 4 - 8x \leq |x-3|$$

$$(a(x-1))^2 \leq (x-3)$$

$$(a(x-1))^2 \leq x-3 \quad 4x^2 + 4 - 8x \leq 0$$

$$a^2x^2 + a^2 - 2a^2x - x + 3 \leq 0 \quad D = 81 - 4 \cdot 4 \cdot 7 = 81 - 112$$

$$a^2 \leq \frac{x-3}{(x-1)^2} \quad x-3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

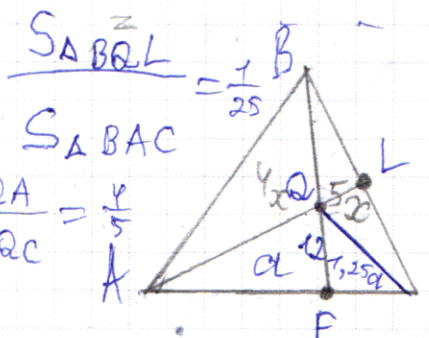
$$|2a - a| \leq \sqrt{2-3} \quad 18 \quad 3, 5, 8$$

$$|a| \leq \sqrt{-1}$$

$$a^2 \leq 1 \quad a \leq \pm \sqrt{1}$$

$$a \geq -\sqrt{1}$$

- $a_n = a_1 + (n-1)d$
- $d_1 = 27$
  - $d_2 = 2403$
  - $d_3 = 30267$
  - $d_4 = 30$
  - $d_5 = 3$
  - $d_6 = 8667$
  - $d_7 = 3$
  - $d_8 = 27$



$$\frac{5x - \frac{9x+y}{25}}{\frac{9x+y}{25}} = \frac{4x}{y};$$

$$\frac{125x - 9x - y}{25} \cdot \frac{25}{9x+y} = \frac{4x}{y}$$

$$\frac{125x - 9x - y}{9x+y} = \frac{4x}{y}$$

$$\frac{116x - y}{9x+y} = \frac{4x}{y}$$

$$116x - y = \frac{4x(9x+y)}{y};$$

$$116xy - y^2 = 4x^2(9x+y);$$

$$116xy - y^2 = 36x^3 + 4x^2y;$$

$$112xy = 36x^3 + y^2;$$

$$\frac{4x}{5x} = \frac{a}{y-a};$$

$$4y - 4a = 5a;$$

$$4y = 9a;$$

$$y = \frac{9}{4}a = 2,25a$$

$$z = \frac{1}{2} BQ \cdot QL \cdot \sin \alpha$$

$$a = \frac{1}{2} AQ \cdot r_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{y}{9} = 6AQ \sin \alpha, y = \frac{54AQ \sin \alpha}{4}$$

$$\frac{9x+y}{25} = \frac{1}{2} BQ \cdot QL \sin \alpha$$

$$\frac{9x + \frac{54AQ \sin \alpha}{4}}{25} = \frac{1}{2} BQ \cdot QL \sin \alpha$$

~~1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96~~

91, 92, 93, 94, 95, 96

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 5x^2$$

x	1/2	0	-1	-2
y	5/20	0	5	20

$$125 = 5x^2$$

$$x^2 = 25$$

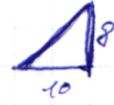
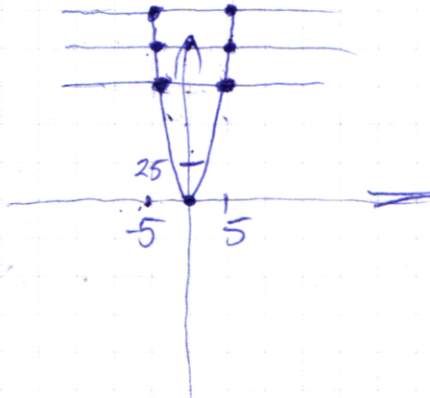
$$x = \pm 5$$

$$80 = 5x^2$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$a = 5x^2$$



$$100 + 64 = a^2$$

$$a^2 = 164$$

$$a = \pm \sqrt{164}$$



$$100 = 64 + a^2$$

$$a^2 = 36$$

$$a = \pm 6$$

$$|-5| + |5| = 10$$

$$|-4| + |4| = 8$$

$$a = 2\sqrt{44}$$

$$6 = |-3| + |3| \quad a = 6$$

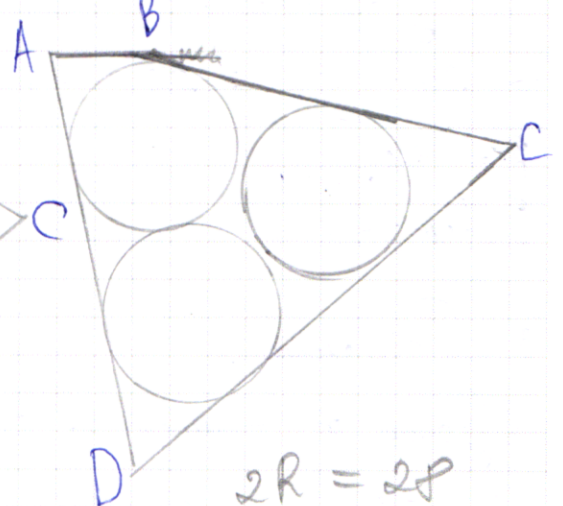
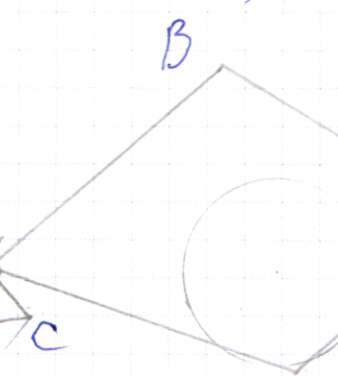
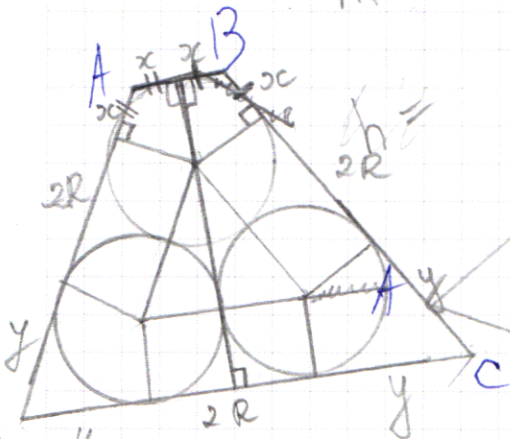
$$2\sqrt{44} = |\sqrt{44}| + |-\sqrt{44}|$$

d1

$$AD = BC$$

$$(-3; 3)$$

$$(-\sqrt{44}; \sqrt{44})$$



$$2R = 2R$$

$$R = 14$$

$$AD + BC - AB - CD = 2R$$

$$AD + BC = 2R + AB + CD$$

$$2R + 2y + 2x + 2z = \quad \checkmark \text{ черновик} \quad \square \text{ чистовик}$$

(Поставьте галочку в нужном поле)

1. Решение.

$$y = 125, y = 80, y = a;$$

$$125 = 5x^2; 80 = 5x^2; a = 5x^2;$$

$$x^2 = 25; x^2 = 16; b = |-5| + |5| = 10;$$

$$x = \pm 5; x = \pm 4; c = |-4| + |4| = 8;$$

По теореме Пифагора  $b^2 + c^2 = a_1^2$ ;

$$100 + 64 = a_1^2; a_1^2 = 164; a_1 = \pm \sqrt{164}; a_1 = 2\sqrt{41};$$

По теореме Пифагора  $a_2^2 + c^2 = b^2$

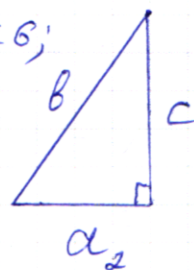
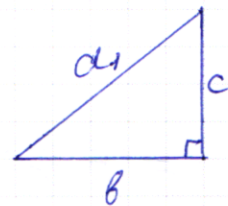
$$a_2^2 + 64 = 100; a_2^2 = 100 - 64; a_2^2 = 36; a_2 = \pm 6;$$

$$a_2 = 6; a_1 = 2\sqrt{41} = (-\sqrt{41}) + |\sqrt{41}|;$$

$$a_2 = 6 = |-3| + |3|;$$

$$(-3; 3); (-\sqrt{41}; \sqrt{41})$$

Ответ:  $(-3; 3); (-\sqrt{41}; \sqrt{41})$ .



2. Решение.

$$AD + BC - AB - CD = 28;$$

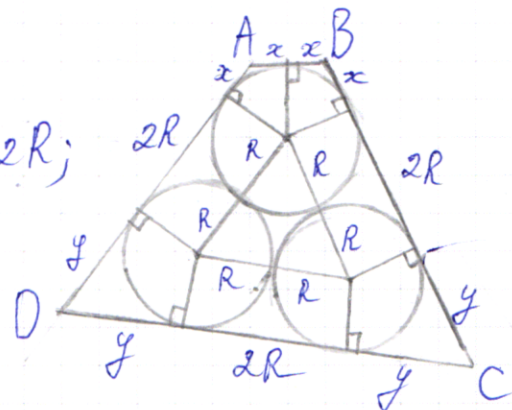
$$AD = x + y + 2R; BC = x + y + 2R;$$

$$AB = 2x; CD = 2y + 2R;$$

$$x + y + 2R + x + y + 2R - 2x - 2y - 2R = 28; 2R = 28;$$

$$R = 14.$$

Ответ: 14.



3. Решение.

Пусть  $x$  - число в альбоме,  $y$  - число марок сейчас, тогда

$$y > 15x; y \leq 17(x-1); y \in (15x; 17(x-1)];$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-008

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the work.

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-008

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)