МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР 14-016

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 5x^2$ пересекает прямые $y = 125$, $y = 80$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 28$.

3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-3}$ является отрезок длины 2?

5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 4 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 25$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 12.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 40]$, $[41; 80]$, $[81; 120]$, $[121; 160]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-016

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$y=5x^2$

$y=125$

$y=80$

$y=a$

$a=?$

(l_1 - длина отрезка на прямой $y=125$)

(l_2 - длина отрезка на прямой $y=80$)

(l_3 - длина отрезка на прямой $y=a$)

$125=5x^2$

$x^2=25$

$x=\pm5$

$l_1=2|\pm5|=10$

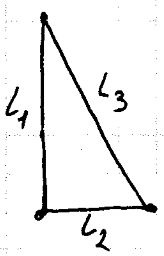
$80=5x^2$

$x^2=16$

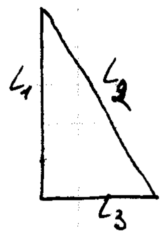
$x=\pm4$

$l_2=2|\pm4|=8$

1



2



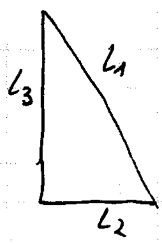
$l_3=\sqrt{l_2^2-l_1^2}$

$l_3=\sqrt{64-100}$

$l_3=\sqrt{-36}$

$l_3=\varnothing$

3



$l_3=\sqrt{l_1^2-l_2^2}$

$l_3=\sqrt{100-64}$

$l_3=\sqrt{36}$

$l_3=\pm6$

$l_3=6$ (т.к. длина ≥ 0)

$y=5\cdot(\pm3)^2$

$y=45 \Rightarrow a=45$

$l_3=\sqrt{l_1^2+l_2^2}$

$l_3=\sqrt{100+64}=2\sqrt{41}$

$y=5(\pm\sqrt{41})^2$ (т.к. ~~при~~ ось „y" делит отрезки пополам)

$y=5\cdot41$

$y=205 \Rightarrow a=205$

Ответ: 45; 205.

№5.

Цифр „3" 6 подряд можно расположить 13 способами ($18-6+1=13$)

На 12 остальных мест в 18-значном числе по 2 варианта поставить цифру: „5" или „8" $\Rightarrow 13\cdot2^{12}=4096\cdot13=53248$

Но по условию каждая цифра встречается минимум 1 раз $\Rightarrow$ нужно исключить 13 вариантов без цифр „5" и 13 - без цифр „8" $\Rightarrow$

$53248-26=53222$

Ответ: 53222.

№ 7

Любое число дает остаток 0; 1; 2; ... 39 (mod 40) => любые 2 числа должны иметь разные остатки. Возьмём наименьшие числа с остатками 0; 1; 2 ... 23 (наименьшие остатки).

$40+1+2+3+4+5=55$

$46+47+48+49+50+51=291$ $\qquad \sum = 1756$

$92+93+94+95+96+97=567$

$138+139+140+141+142+143=843$

При том, нет разницы, брать $1+46$ или $6+41$, сумма от этого не изменится, главное, чтоб остатки были минимальными.

Ответ: 1756.

№ 3.

x - кол-во марок.

$$\begin{cases} 15\cdot a < x & (1) \\ 17a \ge x - 17 & (2) \\ 22a + x = 900 & (3) \end{cases}$$

1) (a - кол-во листов), („по 15 марок на каждый лист не поместятся)

2) („останется минимум 1 лист пустым", 17 марок.)

3) (станет в итоге)

$x = 900 - 22a$

$15a < 900 - 22a$

$37a < 900$

$17a \ge 900 - 22a - 17$

$37a \ge 883$

$883 \le 37a < 900$

Единственное целое решение (число стр. - целое): $a = 24$.

$883 \le 37\cdot 24 < 900$

$883 \le 888 < 900$

$x = 900 - 22\cdot 24$

$x = 900 - 528$

$x = 372$ (марки)

Ответ: 372.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-C16

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$|ax-a| \leq \sqrt{x-3} \qquad x \in (3;\ \infty)$

$|a(x-1)| \leq \sqrt{x-3}$

т.к. $|a(x-1)| \geq 0$, то $\sqrt{x-3} \geq 0 \Rightarrow$

$a^2(x-1)^2 \leq x-3$

$a^2(x-1)^2+2 \leq x-1$

$2 \leq (x-1)(1-a^2x+a^2)$

т.к. $x \in (3;\infty)$, то $x-1 \geq 2 \Rightarrow \cancel{a^2-a^2x+1 \geq 1}$

$\cancel{a^2(1-x)\geq 0}$ $\quad \frac{2}{x-1} \leq 1 \leq 1-a^2x+a^2$

$\frac{2}{x-1} \leq 1 \Rightarrow \quad a^2-a^2x+1 \geq 1$

$a^2(1-x) \geq 0 \quad /\cdot(-1)$

$a^2(x-1) \leq 0 \qquad a=0,\ x\in(3;\infty)$

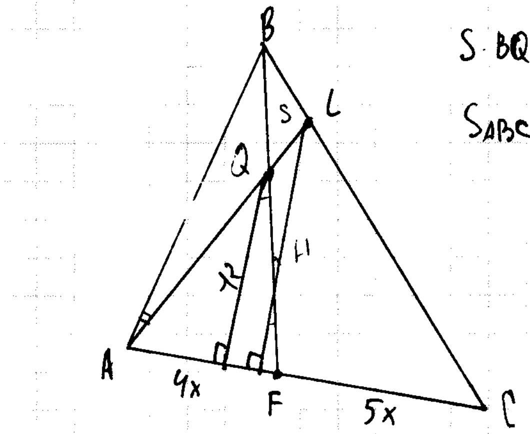
$a^2 \geq 0,\ (x-1) \geq 2 \Rightarrow \varnothing$, т.к. система ~~всегда~~ имеет „∞" кол-во решений.

Ответ: $\varnothing$ (никогда).

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

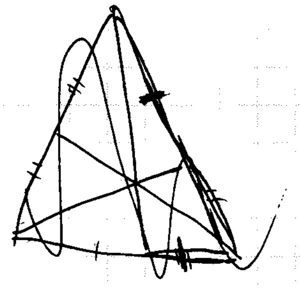
№6.

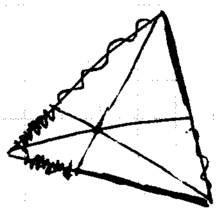


$S_{BQL} = s$

$S_{ABC} = 25s$

$S_{QFC} = 11\frac{2}{9}s$





$S_{ABF} = \frac{25}{9}s \cdot 4 = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}s$

$S_{BFC} = 13\frac{8}{9}s = \frac{125}{9}s$

$|ax-a| \le \sqrt{x-3}$

$\sqrt{x-3} \ge 0,\ |a(x-1)| \ge 0 \Rightarrow (a(x-1))^2 \le x-3$

$a^2(x^2-2x+1) - x + 3 \le 0$

$x \in (3; \infty)$

$a(x-1) \ge 0$

$a(1-x) \ge 0$

$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - x + 3 \le 0$

$a^2x^2 + (2a^2+1)(-x) + (a^2-3) \le 0$

$a^2x^2 - (2a^2+1)x + (a^2-3) \le 0$

$D = (2a^2+1)^2 - 4a^2(a^2-3) =$

$= \cancel{4a^4} + 4a^2 + 1 - \cancel{4a^4} + 12a^2 = 16a^2+1$

$x_{1,2} = \frac{2a^2+1 \pm \sqrt{16a^2+1}}{2a^2} =$

$= 1 + 0{,}5a^2$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \hline 28 & 0{,}428 \\ 20 & \\ 14 & \\ 60 & \end{array}$$

№7.

каждое из чисел при делении на 40 даёт остаток 0; 1; 2 ... 39. => ~~как~~ любые 2 числа из 24-х должны иметь разные остатки (mod 40) => ~~при~~ (первые)

берем 5 чисел первого промежутка + последнее число (минимальное имеющее остаток 0)

$1+2+3+4+5+40 = 55$

во 2 промежутке 6 чисел начиная с остатка 6 (46):

$46+47 \ldots + 51 = 190+101 = 291$

и т.д.:

$92+93+94+95+96+97 = 540+27 = 567$

$138+139+140+141+142+143 = 560+283 = 843$

$55+291+567+843 =$

$= 346+1410 = 1756$

$$\begin{cases} 15\cdot a < x \\ \cancel{17\cdot(a-1) \geq x} \quad 17a \geq x-17 \\ 22a + x = 900 \end{cases}$$

$x = ?$

$x = 900 - 22a$

$15\cdot a < 900 - 22a$

$37a < 900$

$\cancel{17a - 17 \geq 900 - 22a}$ $\quad 17a \geq 900 - 22a - 17$

$\cancel{37a \geq 917}$ $\quad 37a \geq 883$

$900 \geq 37a \leq 917$

$883 \leq 37a < 900$

a (целое) в этом промежутке: 24 $\quad (883 \leq 37\cdot 24 < 900)$

$x = 900 - 22\cdot 24 = 900 - 528 = 372$

$x = 372$

$22 \cdot 24 = 528$

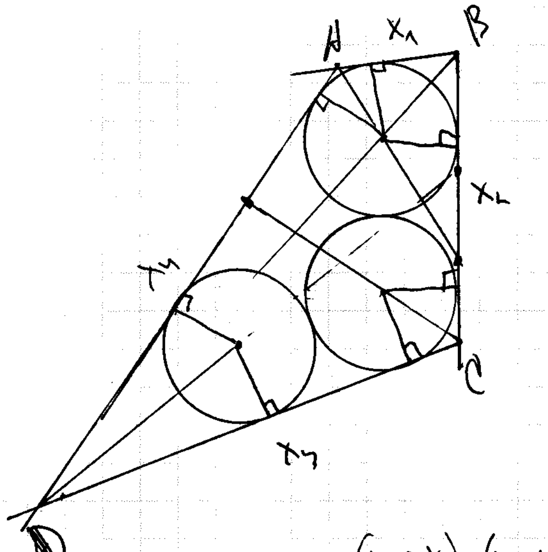
$37 \cdot 24 = 888$

$a^2(x-1)^2 \leq x-3$

$x \in (3; \infty)$

$a^2 \leq \dfrac{x-3}{(x-1)^2}$

a



$(x_2 + x_4) - (x_1 + x_3) = 28$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

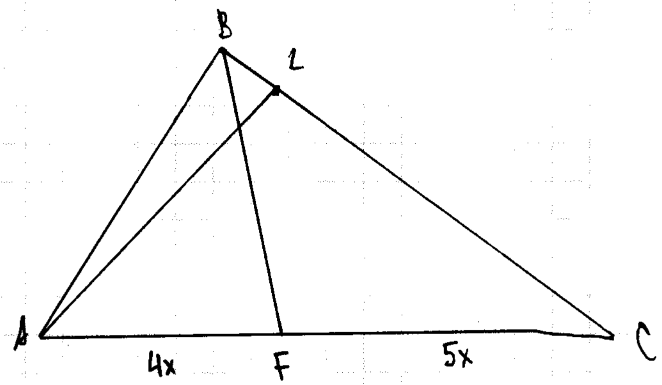
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

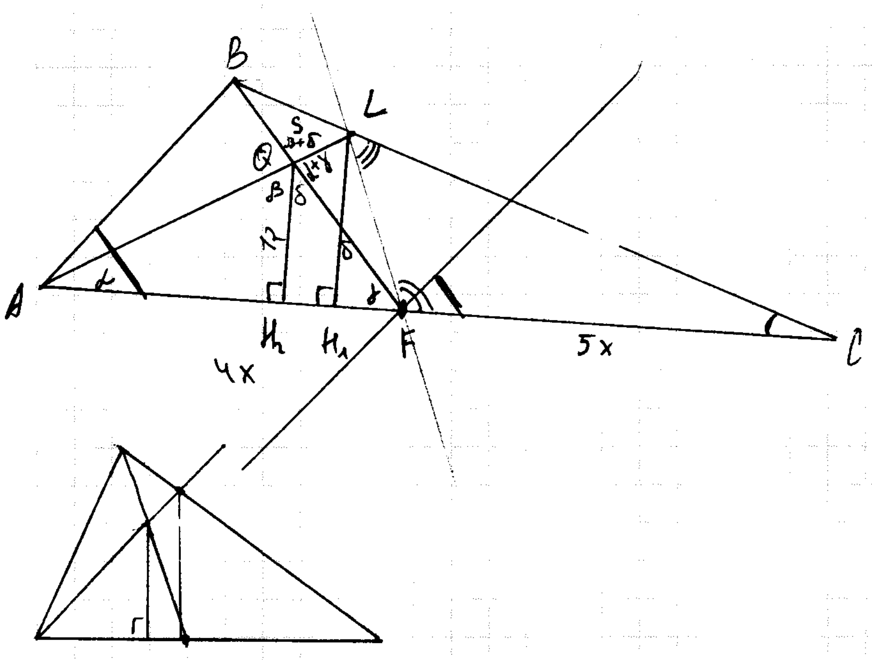
111 - С16

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$a^2(x-1)^2 \le x-3$$

$$a^2(x-1)^2+2 \le x-1$$

$$2 \le (x-1) - a^2(x-1)^2$$

$$2 \le (x-1)(1-a^2x+a^2)$$

т.к. $x \in (3; \infty)$, то $x-1 \ge 2 \Rightarrow a^2-a^2x+1 \ge 1$

$a^2-a^2x+1 \ge 1$ $\quad a^2(x-1) \ge 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-С16

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

Цифру „3" 6 подряд можно расположить 13 способами: $((18-6)+1)=13$

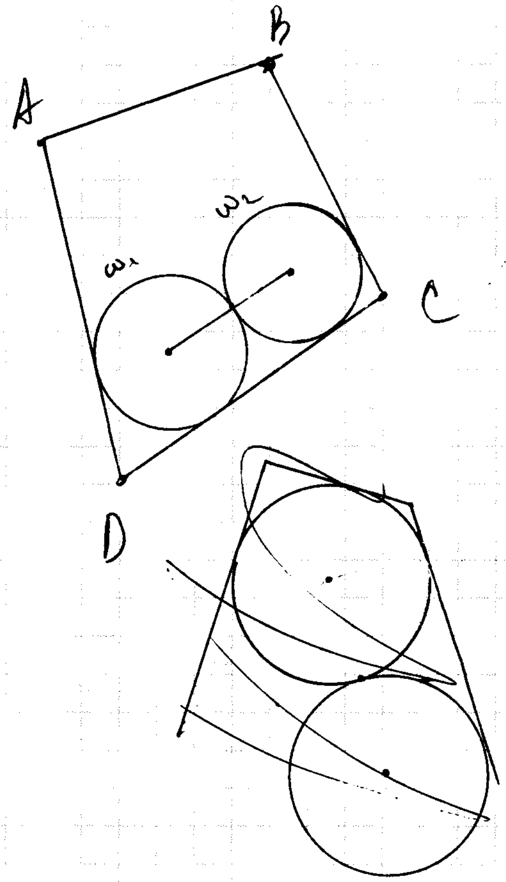
на 12 остальных мест в числе по 2 варианта возможных значений цифры: 5 и 8.

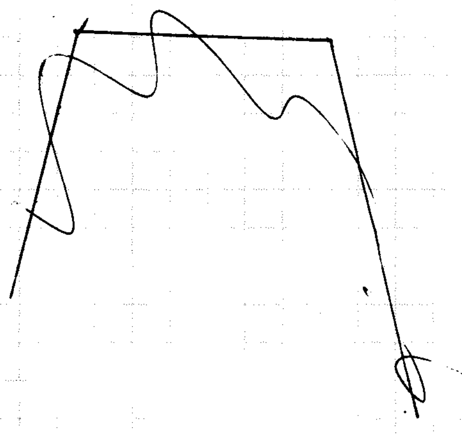
$2^{12} \cdot 13 = 4096 \cdot 13 = 53248.$

$$\begin{array}{r} 4096 \\ \times\ 13 \\ \hline 12288 \\ +\ 40960 \\ \hline 53248 \end{array}$$

Но по условию каждая цифра встр. минимум 1 раз => нужно исключить 12 вариантов где кроме „3" только „8" и 13 - где только „5"

$53248 - 26 = \underline{\underline{53222}}$





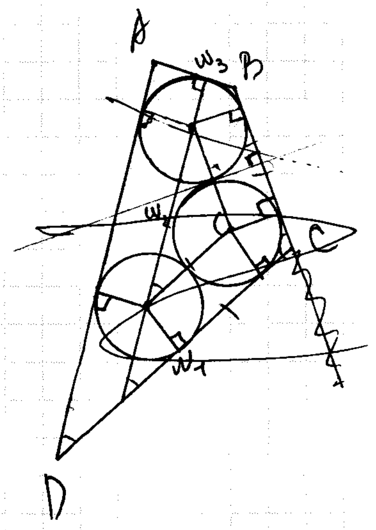
$$\begin{array}{r} 45 \\ -25 \\ \hline 20 \end{array} \quad 25 \quad 18$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

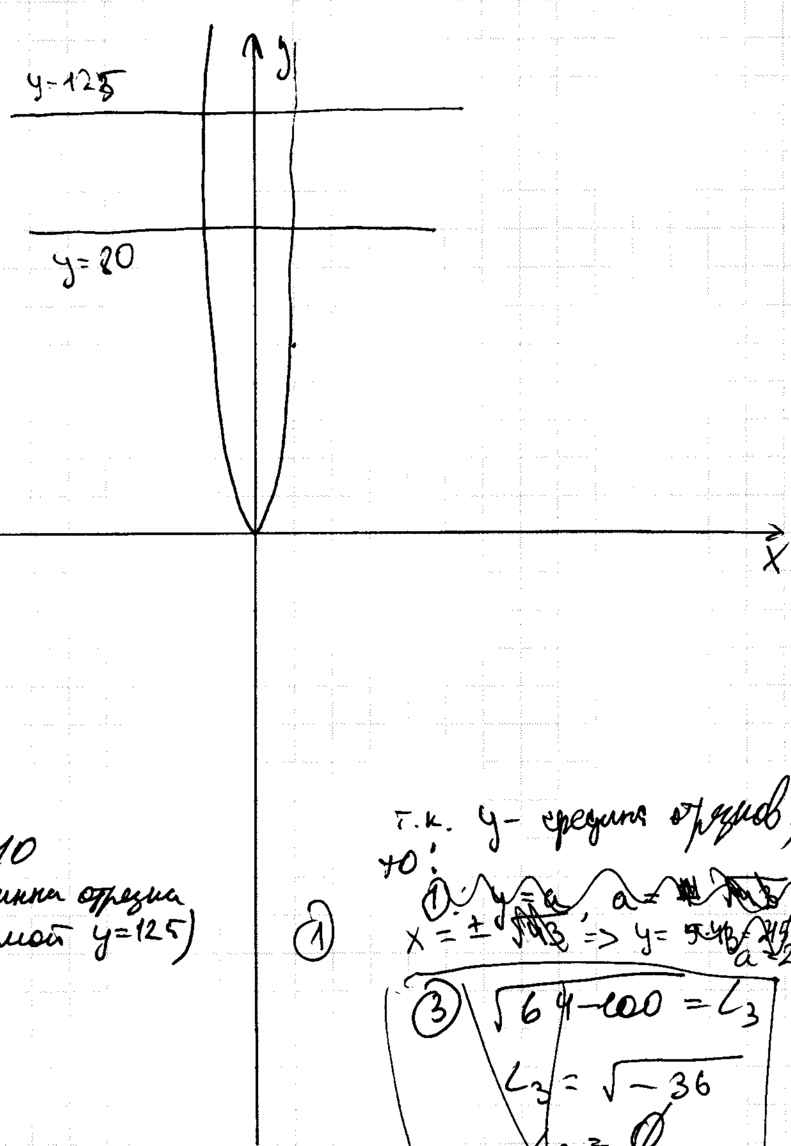
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$AD+BC-(AB+CD)=28$

$y=5x^2$



I $y=125$

$125=5x^2$

$x^2=25$

$x=\pm5$ $\quad L_1=10$

(L_1 – длинна отрезка на прямой $y=125$)

II $y=80$

$80=5x^2$

$x^2=16$

$x=\pm4$

$L_2=8$

(L_2 – длинна отрезка на прямой $y=80$)

т.к. y – средина отрезков, то:

① ~~$y=a$, $a=$~~

$x=\pm\sqrt{43}\Rightarrow y=5\cdot43=215$

$a=215$

③ $\sqrt{64-100}=L_3$

$L_3=\sqrt{-36}$

$L_3=\varnothing$

② $x=\pm3$

$y=5\cdot9=45\Rightarrow$

$a=45$.

① $\sqrt{L_1^2+L_2^2}=L_3$

② $\sqrt{L_1^2-L_2^2}=L_3$

③ $\sqrt{L_2^2-L_1^2}=L_3$

① ~~$\sqrt{16+25}=L_3$~~

~~$\sqrt{41}=L_3$~~

② $\sqrt{100-64}=L_3$

$\sqrt{36}=L_3$

$L_3=\pm6$, $L_3=6$ (т.к. S отрезка не отр.)

① $\sqrt{100+64}=L_3$

$\sqrt{164}=L_3$

$2\sqrt{41}=L_3$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)