

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 5

ШИФР

14-019

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 3x^2$  пересекает прямые  $y = 147$ ,  $y = 75$  и  $y = a$ , отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ . Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 30$ .
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - 3a| \leq \sqrt{x - 1}$  является отрезок длины 4?
5. Найдите количество 19-значных чисел, содержащих только цифры “2”, “5” и “7” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “7” ровно восемь, и они идут подряд.
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как 4 : 25. Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка  $[1; 25]$ ,  $[26; 50]$ ,  $[51; 75]$ ,  $[76; 100]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

[1, 25]

1, 2, 3, 4, 5.

[26, 50]

31, 32, 33, 34, 35.

[51, 75]

61, 62, 63, 64, 65.

[76, 100]

91, 92, 93, 94, 95.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 =$$

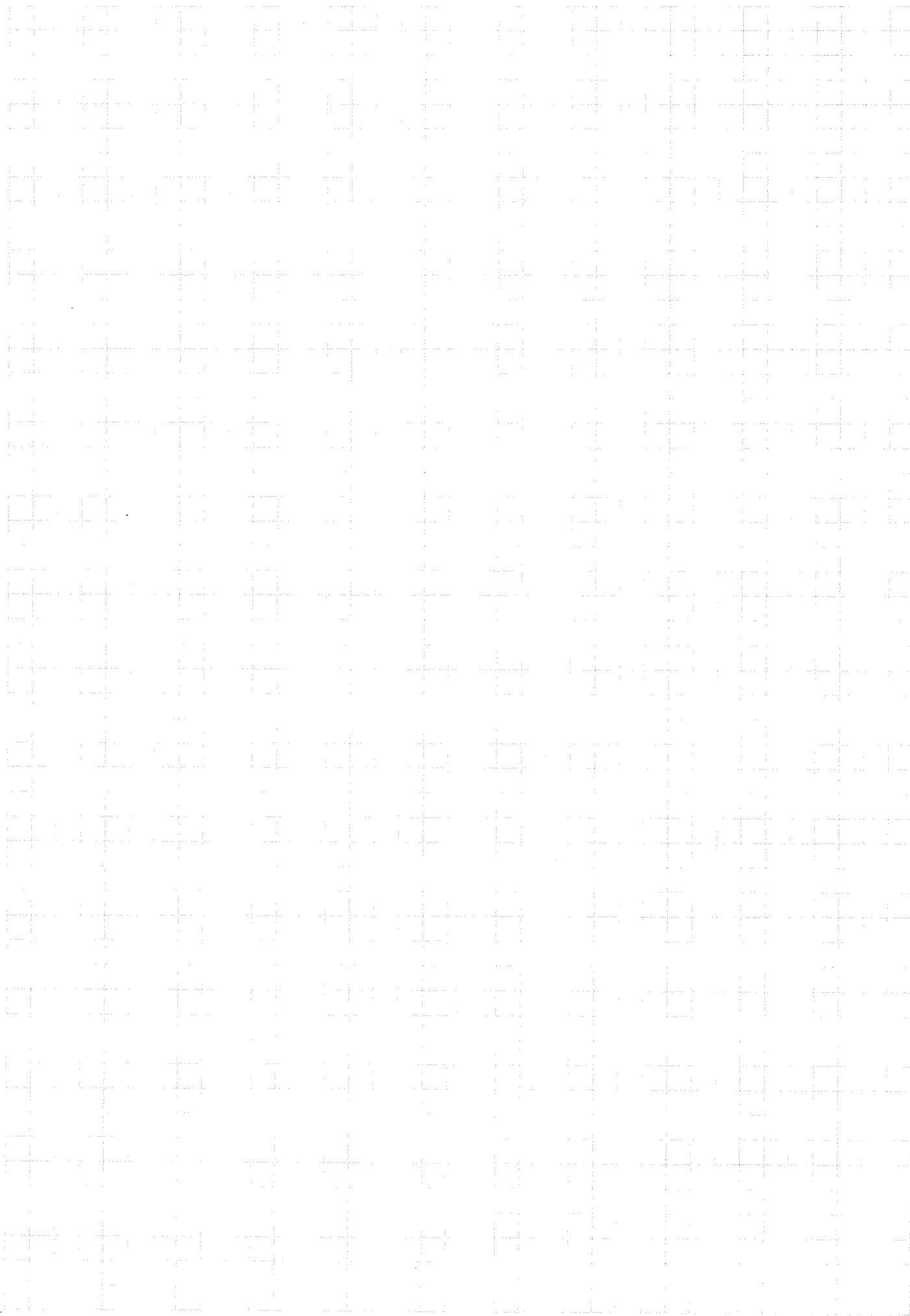
960

Ответ: 960.

№ 3.

Пусть  $x+1$  марок в альбомепогда  $26x$  всего марок $21(x+1)$  марок подарил, после чего у Васильки  
осталось 700 марок.

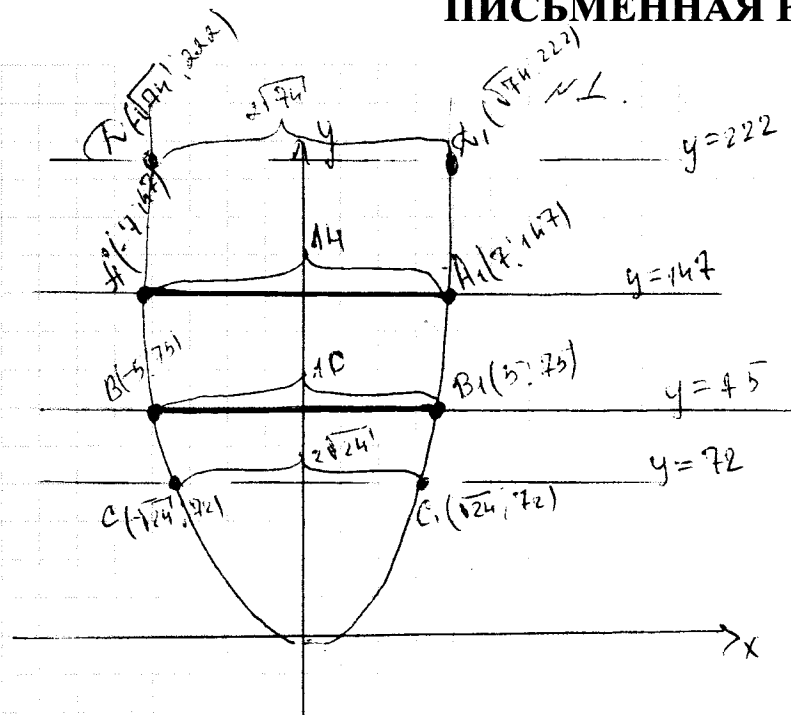
$$26x + 21(x+1) = 700$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y = 3x^2$$

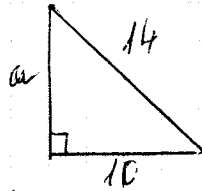
$$147 = 3x^2$$

$$x = \pm 7$$

$$75 = 3x^2$$

$$x = \pm 5$$

I. вар.

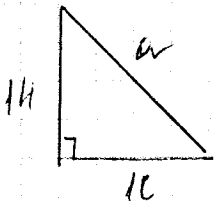


$$14^2 = a^2 + 10^2$$

$$a = 2\sqrt{24}$$

$$\text{раешт: } 2\sqrt{24} \Rightarrow x = \pm\sqrt{24}$$

II вар.



$$a^2 = 14^2 + 10^2$$

$$a = 2\sqrt{74}$$

$$\text{раешт: } 2\sqrt{74} \Rightarrow x = \pm\sqrt{74}$$

$$y = 3 \cdot (\sqrt{74})^2 = 222 \quad a = 222$$

Ответы: при  $a = 72$ ;  $a = 222$ .

$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

н.п.

в.д.с.  $x-1 \geq 0$   
 $x \geq 1$

$$(ax - 3a)^2 \leq x - 1$$

формула дискриминанта = 4

$$a^2 x^2 - 6a^2 x + 9a^2 - x + 1 \leq 0$$

$$x^2 a^2 - x(6a^2 + 1) + 9a^2 + 1 \leq 0$$

$$D = (6a^2 + 1)^2 - 4 \cdot a^2 (9a^2 + 1) = 8a^2 + 1 \Rightarrow x \geq 0$$

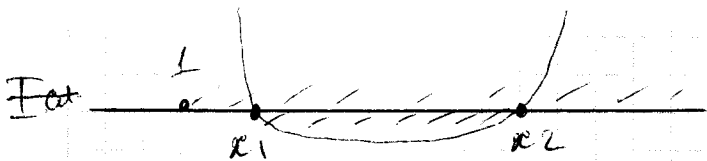
$$x_1 = \frac{6a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2}$$

$$x_2 = \frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2}$$

$$\frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} > \frac{6a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2}$$

$$6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1} > 6a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1}$$

$$2\sqrt{8a^2 + 1} > 0 \Rightarrow x_2 > x_1 \text{ при любых } a.$$



$$\frac{6a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} \geq 1$$

$$4a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1} \geq 0$$

$$4a^2 + 1 \geq \sqrt{8a^2 + 1}$$

$$16a^4 + 8a^2 + 1 \geq 8a^2 + 1$$

$$16a^4 \geq 0$$

при любых  $a$ ,  $x_1 \geq 1$ .

$$x_2 - x_1 = 4.$$

$$\frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} - \frac{6a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} = 4$$

$$\frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1} - 6a^2 - 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} = \frac{4}{1}$$

$$\frac{2\sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} = \frac{4}{1}$$

$$4a^2 = \sqrt{8a^2 + 1}$$

$$4a^2 = \sqrt{8a^2 + 1}$$

$$16a^4 = 8a^2 + 1$$

$$16a^4 - 8a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 = t, t \geq 0$$

$$16t^2 - 8t - 1 = 0$$

$$D = 64 + 4 \cdot 16 = 128$$

$$t_1 = \frac{8 - \sqrt{128}}{32} = \frac{8(1 - \sqrt{2})}{32 \cdot 4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{4} \text{ не подходит}$$

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$$

$$a^2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2}$$

Ответ: при  $a = \pm \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2}$

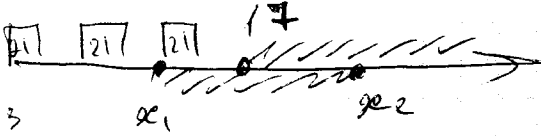


бюджет 46

22 22 2

21 21 4м.

22 22 22 4



15 минут

$$14 \cdot 26 + 15 \cdot 21 = 284 + 315 = 679$$

$$26 \cdot 14 = 364$$

$$364 + 26 = 390$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 15 \\ \hline 130 \\ + 260 \\ \hline 390 \end{array}$$

$$22 \cdot x = 2(21 \cdot x)$$

$$22x = 42x$$

$$42x - 22x = 20x$$

$$x \in \mathbb{Z}^+ : \frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2}$$

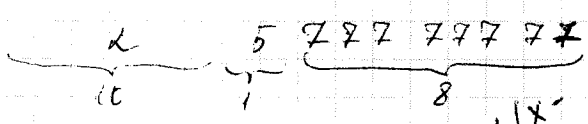
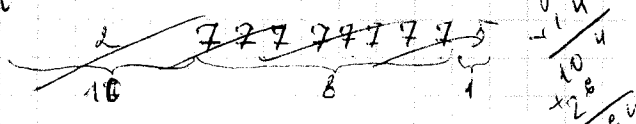
$$\frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} - 1 = 4$$

$$\frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} = \frac{3}{1}$$

$$6a^2 = 6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}$$

$$0 = 1 + \sqrt{8a^2 + 1}$$

2, 5, 7



$$26 \cdot (x-1) = 900 - (21 \cdot x)$$

$$26x - 26 = 900 - 21x$$

$$26x + 21x = 900 + 26$$

$$47x = 926$$

$$22 \cdot 15 = 330$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 15 \\ \hline 110 \\ + 330 \\ \hline 330 \end{array}$$

$$26(x-1) + 21(x-1) = 330$$

$$26 \cdot 14 = 364$$

$$21 \cdot 15 = 315$$

22 22 22

не помещается + a

26 26 26

нужно 26(x-1)

21 21 21

нужно

$$22 \cdot x = 26 \cdot (x-1)$$

$$26(x-1) + (21 \cdot x) = 900$$

$$26x - 26 + 21x = 900$$

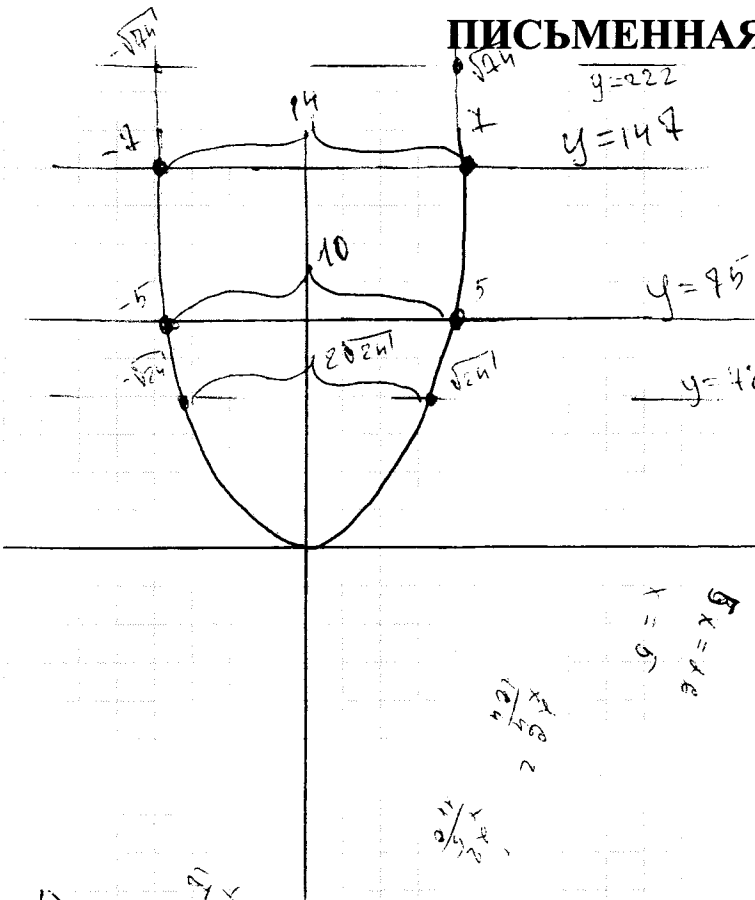
$$47x = 900 + 26$$

$$47x = 926$$

$$x = 19.7$$



**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**



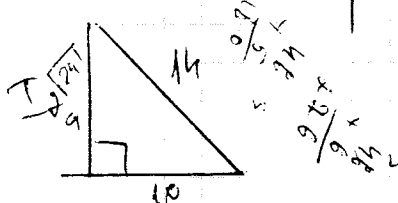
$y = 3x^2$

$3x^2 = 147$   
 $x^2 = 49$   
 $x = \pm 7$

$3x^2 = 75$   
 $x^2 = 25$   
 $x = \pm 5$

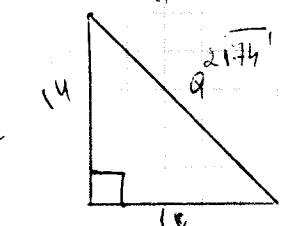
$3x^2 - 147 = 0$   
 $3(x^2 - 49) = 0$   
 $3(x-7)(x+7) = 0$   
 $x-7=0 \Rightarrow x=7$   
 $x+7=0 \Rightarrow x=-7$

$3x^2 - 75 = 0$   
 $3(x^2 - 25) = 0$   
 $3(x-5)(x+5) = 0$   
 $x-5=0 \Rightarrow x=5$   
 $x+5=0 \Rightarrow x=-5$



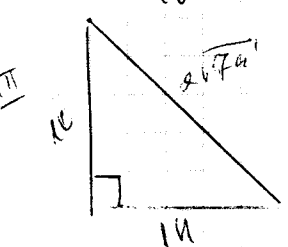
$a^2 + 100 = 196$   
 $a^2 = 96$   
 $a = \sqrt{96}$

расст. =  $\sqrt{2024} \Rightarrow x = \pm \sqrt{2024}$   
 $y = 3 \cdot 24 = 72$



$a^2 = 196 + 100$   
 $a^2 = 296$   
 $a = \sqrt{296}$

$a = 2\sqrt{74} \Rightarrow$  расст. =  $2\sqrt{74} \Rightarrow x = \pm \sqrt{74}$   
 $y = 3 \cdot 74 = 222$



$a = 222$

$$|ax - 3a| \leq \sqrt{x-1}$$

Гимна айрека = 4.

$$\begin{aligned} x-1 > 0 \\ x > 1 \end{aligned}$$

$$|a(x-3)| \leq \sqrt{x-1}$$

$$(ax - 3a)^2 \leq x-1$$

$$a^2(x-3)^2 - x + 1 \leq 0$$

$$6a^2x^2 - 6a^2x + 9a^2 - x + 1 \leq 0$$

$$x^2 a^2 - x(6a^2 + 1) + 9a^2 + 1 \leq 0$$

$$D = (6a^2 + 1)^2 - 4a^2(9a^2 + 1) = 36a^4 + 12a^2 + 1 - 36a^4 - 4a^2 = 8a^2 + 1$$

всегда  $\geq 0$ .

$$x_1 = \frac{6a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2}$$

1 бип.

$$a = 1$$

$$a = 0$$

$$26(x-1) \cdot 26 = 590$$

$$\frac{611 - 191}{x}$$

$$\frac{1}{x} = a$$

$$22x \cdot 22 \cdot 16 = 352 + 3200$$

$$\frac{1}{x} = a$$

$$21x \cdot 21 \cdot 16 = 556 + 3400$$

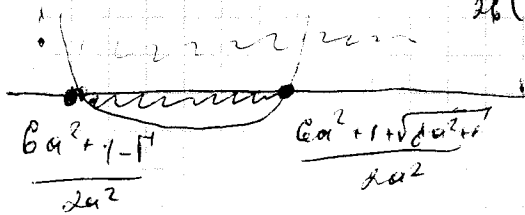
$$\frac{8+1+3}{x} = 5$$

$$x_2 = \frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2}$$

$$26(x-1) = 21x + 6$$

$$26(x-1) = 22x + a$$

$$\frac{6a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} > \frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2}$$



$$x \in \left[ \frac{6a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2}, \frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} \right]$$

$$\frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} - \frac{6a^2 + 1 - \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} = 4$$

$$\frac{6a^2 + 1 + \sqrt{8a^2 + 1} - 6a^2 - 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} = 4$$

$$\frac{\sqrt{8a^2 + 1}}{a^2} = 4$$

$$4a^2 = \sqrt{8a^2 + 1}$$

$$16a^4 = 8a^2 + 1$$

$$16a^4 - 8a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 = t, t \geq 0$$

$$16t^2 - 8t - 1 = 0$$

$$D = 64 + 4 \cdot 16 = 128$$

$$t_1 = \frac{8 - \sqrt{128}}{2 \cdot 16} = \frac{8 - 8\sqrt{2}}{32}$$

$$a = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} 4a^2 &= 1 + \sqrt{2} \\ a^2 &= \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{4}}$$

$$t_2 = \frac{8 + \sqrt{128}}{2 \cdot 16} = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{8(1 - \sqrt{2})}{2 \cdot 16} = \frac{1 - \sqrt{2}}{4}$$

черновик  чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

[1, 15]  
1, 2, 3, 4, 5

[26, 50]  
31, 32, 33, 34, 35

[31, 75]  
~~51, 52, 53, 54, 55~~  
~~56, 57, 58, 59, 60~~

61, 62, 63, 64, 65

[76, 100]  
~~86, 87, 88, 89~~  
~~90, 91, 92, 93, 94, 95~~

$$22x + b = 26(x-1)$$

$$26(x-1) - 22x = b$$

20	21	22	23	24	25

x именов.  
b  
220x + остаток.

26(x-1) + 22x = 26x + x + b

22x + b

22x + b + x

$$\begin{cases} -4x + 26 + b = 0 \\ 48x - 26 + b = 400 \end{cases}$$

$$-52x + 52 = -400$$

$$52x = 452$$

$$x = \frac{452}{52}$$

$$x = 8$$

26(x-1)

210x + остаток

21x + b + x = 22x + b

$$\begin{cases} 22x + b = 26(x-1) \\ 26(x-1) + 22x + b = 400 \\ 22x + b - 26x + 26 = 0 \\ 26x - 26 + 22x + b - 200 = 0 \\ -4x + 26 + b = 0 \\ 48x - 26 + b = 400 \end{cases}$$

$$x + x + 3 + 4 + 5 + 21 + 32 + 33 + 34 + 35 + 61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 = 100 + 40 + 34 + 66 + 96 + 125 + 129 + 183 + 187 =$$

22x + b = 26(x-1)

26(x-1) = 22x + b

26(x-1) + 22x = 200

b = 4x - 26

22x + b + x = 22x + b

22x - 1x

26(x-1) + 26(x-1) = 700

26x - 26 + 26x - 26 = 700

52x = 752

$$\begin{array}{r} 125 \\ + 129 \\ \hline 254 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 254 \\ + 138 \\ \hline 392 \end{array}$$

22x + 136 + 254 + 390 = 370 + 390 = 760

b = 26x - 26 - 22x

b = 4x - 26

22x + b = 26x - 26

b = 26x - 26 - 22x

b = 4x - 26

$$\begin{cases} 26(x-1) + 22x + b = 700 \\ 26(x-1) - 22x = b \end{cases}$$

26x - 26 + 22x + (26x - 26) - 22x = 700

48x - 26 + 4x - 26 = 700

52x = 752

x

$$\begin{cases} 22x + b = 26(x-1) \\ 26(x-1) + 21x = 400 \end{cases}$$

5 5  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
1

7 7 7 7 7 7 7 7  
8

2 2  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
1

7 7 7 7 7 7 7 7  
8

(10)

(10)

Собор

+8

5 2 5 5 5 5 5 5 5 5 7 7  
5 5 2  
5 5 5 5 5 5 5 2 5 7 7 7 7

5 2 2 5 5 5 5 5 5 5 7 7 7 7  
5 5 2 2 5 5 5 5 5 5  
5 5 5 5 5 5 5 2 2 5 7 7 7  
5 5 5 2 2 5 5 5 5

5 2 5 2 5 5 5 5 5 5  
5 5 2 5 5 5 5 5

5 5 5 5 5 5 5 5 2 7 7 7 7  
5 5 5 5 5 5 5 5 2 2 7 7  
5 2 2 2 2 7 7 7

2 2 2 2 2 5 7 7 4  
2 5 5 5 7 4

2 2 1 4 3  
- 4 3  
2 9 1

26 \* 15 = 416 на мешке  
21 \* 16 = 336 + 390 = 726  
+ 45 / 30 = 1.5

15 меш.  
26(14) = 364 меш.  
27x = 700 - 364 = 336  
x = 336 / 21 = 16 мешей

22x + 21x + 21 = 700  
43x = 721

22x + 21(x-1) = 700  
43x - 21 = 700  
43x = 721  
x = 16  
Хмельное в мешках  
Всего мешков (10)

2 2  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
1

7 7 7 7 7 7 7 7  
2 6  
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

2  
10  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
1

336 / 21 = 16

121 / 126 = 0.96

26(x-1) - 21x = 700  
22x + 8  
26(x-1) + 21x = 700  
26(x-1) = 700 - 21x  
22x + 6 = 700 - 21x = 6  
26(x-1) - 22x = 700 - 21x  
4x + 26x - 26 - 22x = 700 - 21x  
4x + 21x = 726  
47x = 726

7 7 7 7 7 7 7 7 5 5 5 5 5  
6 10

2 7 7 ... 7 2 5 5 5 5 5  
8

2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10

(10)

726 / 47 = 15

5 7 7 7 7 7 2 2 2 2 2  
8

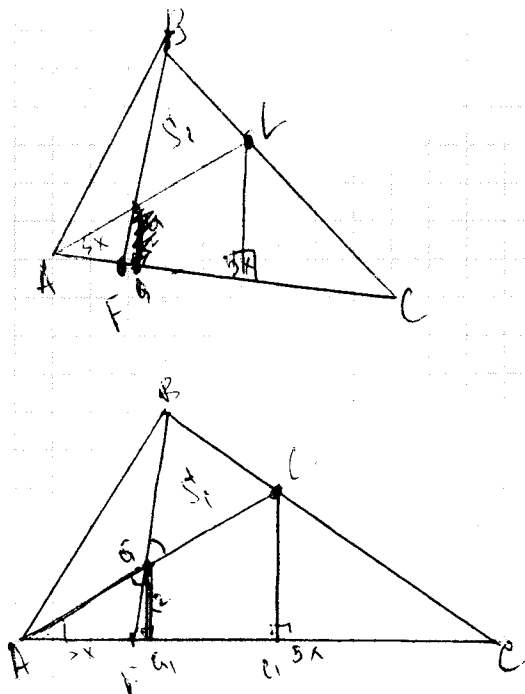
1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10

(10)

47 / 15 = 3.13

47 / 15 = 3.13

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$BGL : BAC = \frac{1}{25}$$

$$\frac{BGL}{BAC} = \frac{4}{25}$$

$$4BAC = 25BGL$$

$$\begin{cases} 26(x-1) - 21x = x+6 \\ 26(x-1) + 21x = 400 \end{cases}$$

$$6 = 4x - 26$$

$$26x - 26 - 21x - x - 4x + 26 = 0$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \\ 52 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 26x - 26 - 21x &= 5x - 26 \\ 5x - 26 &= 26 \\ 5x &= 52 \\ x &= 10.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26(x-1) &= 22x + 6 \\ 26x - 26 &= 22x + 6 \\ 4x &= 32 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

- 10
- 9
- 8
- 7
- 6
- 5
- 4
- 3
- 2
- 1

7 7 7 7 7 7 7 7

$$\begin{aligned} 26x + 21x + 21 &= 400 \\ 47x &= 379 \\ x &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -42x &= x + 6 - 400 \\ -42x &= x - 394 \\ -43x &= -394 \\ x &= 9.16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 12x &= 726 \\ 17x &= 726 \\ x &= 42.7 \end{aligned}$$

[1; 100] 1  
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20  
21 22 23 24 25 26  
27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

[1; 25] [26; 50] [51; 75] [76; 100]

1 3 4 5 6

27

51 52 53 54 55

1 3 4 5 6 27 32 33 34 35

26 27 28 29 30 31 32 33 34 35

2

26

55 56 57

26 27 28 29 30

$$\begin{aligned} 51 \cdot 55 - 35 &= 60 \\ 25 \cdot 50 &= 1250 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 55 + 25 &= 80 \\ 75 \cdot 100 &= 7500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 55 - 55 &= 0 \\ 26 - 51 &= -25 \\ 27 - 52 &= -25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50 - 65 &= -15 \\ 75 - 54 &= 21 \\ 80 - 55 &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20 \cdot 81 &= 1620 \end{aligned}$$

$$26x + 21x + 21 = 700$$

$$47x = 679$$

$$x =$$

$$47x = 679$$

$$\begin{array}{r} 700 \\ - 21 \\ \hline 679 \end{array} \Big/ 47$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ 700 \\ - 21 \\ \hline 679 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 9 \\ \hline 423 \\ 423 \\ \hline 423 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 14 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$26x - 21(x+1) = 700$$

x - менше

$$26(x-1) + 21x = 700$$

$$26x - 26 + 21x = 700$$

$$47x = 726$$

$$x = \frac{726}{47}$$

$$\begin{array}{r} 726 \\ - 47 \\ \hline 256 \end{array} \Big/ 47$$