M5.1 Числовая последовательность задана следующим образом: первое число равно 2, второе равно 3, а каждое следующее получается делением предыдущего на предпредыдущее (например, третье равно 3/2). Найдите 2018-ое число этой последовательности.

Решение. Последовательность периодична с периодом 6: 2, 3, 3/2, 1/2, 1/3, 2/3, 2, 3, ... Поэтому на 2018 позиции стоит число 3.

M5.2 Ученики 5 класса отправились на праздник. У каждого мальчика было по 6 воздушных шариков, а у каждой девочки — по 5 шариков. По дороге дети стали баловаться и прокалывать шарики друг у друга. В итоге каждая девочка проколола по 2 шарика, а каждый мальчик — по 3 шарика. Могло ли так оказаться, что, когда они пришли на праздник, у них всего осталось 100 шариков?

Решение. Нет, не могло. В конце должно было остаться число шариков, кратное трём.

M5.3 Шоколадка имеет форму квадрата, состоящего из 5×5 одинаковых долек. За один шаг разрешается разломить один целый кусок по линии между дольками. Сколько нужно сделать шагов, чтобы разделить изначально целую шоколадку на все её 25 долек? Зависит ли это число от того, в каком порядке ломать? Объясните свой ответ.

Решение. За один разлом число кусков увеличивается ровно на один. В начале кусок всего один — вся шоколадка. В конце долек 25. Итого шагов нужно сделать 24, независимо от порядка.

M5.4 Имеется 101 пуговица, каждая — одного из 11 цветов. Доказать, что либо найдутся 11 пуговиц одного цвета, либо найдутся 11 пуговиц — все разных цветов.

Решение. Если 11 пуговиц одного цвета не найдется ни для какого цвета, то в каждом цвете не более 10 пуговиц. Если какого-то цвета нет, то всего пуговиц не более 100.

М6.1 Числовая последовательность задана следующим образом: первое число равно 2, второе равно 3, а каждое следующее получается делением предыдущего на предпредыдущее (например, третье равно 3/2). Найдите 2018-ое число этой последовательности.

Решение. Последовательность периодична с периодом 6: 2, 3, 3/2, 1/2, 1/3, 2/3, 2, 3, ...

М6.2 Ученики 5 класса отправились на праздник. У каждого мальчика было по 6 воздушных шариков, а у каждой девочки — по 5 шариков. По дороге дети стали баловаться и прокалывать шарики друг у друга. В итоге каждая девочка проколола по 2 шарика, а каждый мальчик — по 3 шарика. Могло ли так оказаться, что, когда они пришли на праздник, у них всего осталось 100 шариков?

Решение. Нет, не могло. В конце должно было остаться число шариков, кратное трём.

М6.3 Шоколадка имеет форму квадрата, состоящего из 5×5 одинаковых долек. За один шаг разрешается разломить один целый кусок по линии между дольками. Сколько нужно сделать шагов, чтобы разделить изначально целую шоколадку на все её 25 долек? Зависит ли это число от того, в каком порядке ломать? Объясните свой ответ.

Решение. За один разлом число кусков увеличивается ровно на один. В начале кусок всего один — вся шоколадка. В конце долек 25. Итого шагов нужно сделать 24, независимо от порядка.

М6.4 На клетчатой бумаге дано 5 произвольных узлов сетки. Докажите, что середина хотя бы одного из отрезков, соединяющих пару из этих узлов, также является узлом.

Решение. Всего вариантов четностей координат в паре (x, y) — 4 штуки: (чет, чет), (неч, чет), (чет, неч), (неч, неч). Точек всего 5, поэтому хотя бы две точки имеют одинаковую четность соответствующих координат. Их полусумма, соответственно, целая.

Ф7.1 Длина новорождённого котёнка обычно составляет $8 - 12$ см, а к 8 месяцам кот практически перестаёт расти и вырастает примерно до 45 см в длину. Оцените, с какой средней скоростью увеличивается длина кота за первые 8 месяцев жизни. Дайте ответ в миллиметрах в секунду.

Решение. $v_{\text{ср}} = \dfrac{350}{8 \cdot 30 \cdot 86400} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ мм/с.

Ф7.2 Две подводные лодки плывут в кильваторе (друг за другом) на расстоянии l одна от другой с одинаковой скоростью V. Сигнал гидролокатора, находящегося на задней лодке, достигает передней лодки, отражается и возвращается обратно. Скорость звука в воде равна c. Найдите время между моментами подачи сигнала и регистрацией эха.

Решение. Между подачей сигнала и регистрацией эха звук проходит в системе отсчета лодок расстояние l сначала со скоростью $c+V$, а затем со скоростью $c-V$, откуда $t = \dfrac{l}{c+V} + \dfrac{l}{c-V} = \dfrac{2lc}{c^2 - V^2}$.

Ф7.3 Деревянный шарик радиуса $R = 6$ см лежит на дне цилиндрического сосуда радиуса $2R$. В сосуд наливают воду до тех пор, пока шарик не начнёт отрываться от дна. После этого шарик из сосуда удаляют. Найдите уровень воды, установившийся в сосуде. Плотности дерева и воды примите равными $\rho_{\text{д}} = 500$ кг/м^3 и $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м^3 соответственно.

Решение. В момент, когда шарик начинает отрываться от дна: $\rho_{\text{в}} V_{\text{выт}} g = \rho_{\text{д}} V_{\text{ш}} g$, откуда $V_{\text{выт}} = \dfrac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}}} V_{\text{ш}} = \dfrac{500}{1000} \cdot \dfrac{4\pi}{3} R^3 = \dfrac{2}{3}\pi R^3$. Так как шарик погружен в воду наполовину, то уровень воды в сосуде оказывается равен R. Тогда объём воды, налитой в сосуд $V = \pi(2R)^2 \cdot R - V_{\text{выт}} = 4\pi R^3 - \dfrac{2}{3}\pi R^3 = \dfrac{10}{3}\pi R^3$. После удаления шарика из сосуда уровень воды равен $H = \dfrac{V}{\pi(2R)^2} = \dfrac{\frac{10}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \dfrac{5}{6} R = 5$ см.

М7.1 Докажите, что число $2027 \cdot 2007 + 100$ является составным.

Решение. $2027 \cdot 2007 + 100 = (2017 + 10)(2017 - 10) + 100 = 2017^2$.

М7.2 Сколько существует десятизначных чисел с суммой цифр 4?

Решение. Возможны следующие случаи:

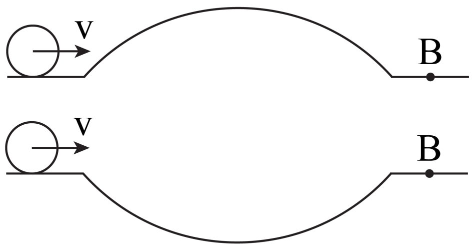
- Число начинается с цифры 4. Тогда все остальные — нули, такой случай только один.
- Число начинается с цифры 3. Среди оставшихся 9 позиций ровно одна единица — итого 9 случаев.
- Число начинается с цифры 2. Тогда оно либо содержит две двойки (9 способов), либо еще две единицы ($9 \cdot 8/2$ способов).
- Число начинается с единицы. Тогда либо в его записи помимо нулей есть тройка (9 случаев), либо двойка и единица ($9 \cdot 8$ способов), либо еще три единицы ($9 \cdot 8 \cdot 7/2/3$ способа).

Итого таких чисел $1 + 9 + 9 + 9 \cdot 4 + 9 + 9 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 7 = 220$.

М7.3 Точки K и L — середины сторон AB и BC правильного шестиугольника $ABCDEF$ (выпуклого шестиугольника, у которого все стороны равны между собой и все углы равны между собой). Отрезки KD и LE пересекаются в точке M. Площадь треугольника DEM равна 12. Найдите площадь четырёхугольника $KBLM$.

Решение. Площади четырёхугольников $KBCD$ и $LCDE$ равны. Вычитая площадь общей части $LCDM$, получим равенство площадей треугольника MDE и четырехугольника $KBLM$.

Ф8.1 Двум одинаковым шарикам, изображенным на рисунке, придали одинаковую скорость, направленную горизонтально. Сравните времена движения обоих шариков до точки B. Считайте, что трения нет, а начальной скорости достаточно, чтобы достигнуть B. Длины путей для обоих шариков одинаковы.



Решение. Из ЗСЭ следует, что во время всего движения скорость первого шарика по модулю не больше v, а второго — не меньше v, причем на горке и в лунке неравенства строгие. Поэтому первый шарик преодолевает препятствие дольше, чем второй.

Ф8.2 Деревянный шарик радиуса $R = 6$ см лежит на дне цилиндрического сосуда радиуса $2R$. В сосуд наливают воду до тех пор, пока шарик не начнёт отрываться от дна. После этого шарик из сосуда удаляют. Найдите уровень воды, установившийся в сосуде. Плотности дерева и воды примите равными $\rho_д = 500$ кг/м^3 и $\rho_в = 1000$ кг/м^3 соответственно.

Решение. В момент, когда шарик начинает отрываться от дна: $\rho_в V_{выт} g = \rho_д V_ш g$, откуда $V_{выт} = \frac{\rho_д}{\rho_в} V_ш = \frac{500}{1000} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$. Так как шарик погружен в воду наполовину, то уровень воды в сосуде оказывается равен R. Тогда объём воды, налитой в сосуд $V = \pi(2R)^2 \cdot R - V_{выт} = 4\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{10}{3}\pi R^3$. После удаления шарика из сосуда уровень воды равен $H = \frac{V}{\pi(2R)^2} = \frac{\frac{10}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{5}{6} R = 5$ см.

Ф8.3 В калориметр, содержащий $m_1 = 2$ кг льда при температуре $t_1 = -5°C$, добавили $m_2 = 200$ г воды при температуре $t_2 = +5°C$. Сколько льда будет в калориметре после установления равновесия? Теплоёмкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг$\cdot°C$), теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг$\cdot°C$), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг.

Решение. Лёд нагревается, а вода охлаждается и, частично или вся, замерзает. Если замерзла только часть воды, то конечная температура равна $t = 0°C$ и уравнение теплового баланса запишется так: $m_1(t_0 - t_1)c_л = m_2(t_2 - t_0)c_в + \Delta m\lambda$. Отсюда

$$\Delta m = \frac{m_1(t_0 - t_1)c_л - m_2(t_2 - t_0)c_в}{\lambda} = 0{,}05 \text{ кг.}$$

Итак, льда будет 2,05 кг.

Ф8.4 Температура воздуха в помещении $t_1 = 14°C$, а относительная влажность $\varphi_1 = 60\%$. После включения нагревателя температура повысилась до $t_2 = 22°C$, причём некоторая часть воздуха вместе с содержащимся в нём водяным паром ушла наружу. В результате давление в комнате не изменилось. Определите относительную влажность при новой температуре t_2. Давления насыщенного пара при температурах t_1 и t_2 равны, соответственно, $P_{нас1} = 12$ мм. рт. ст. и $P_{нас2} = 20$ мм. рт. ст.

Решение. Так как полное давление в комнате не изменилось, $(P_{возд} + P_{пара})_1 = (P_{возд} + P_{пара})_2$. Так как ушли одинаковые части воздуха и пара, $(P_{возд}/P_{пара})_1 = (P_{возд}/P_{пара})_2$. Таким образом, $P_{пара1} = P_{пара2}$, но $P_{пара1} = \varphi_1 P_{нас1}$, а $P_{пара2} = \varphi_1 P_{нас2}$. Итак, $\varphi_2 = \varphi_1 \cdot \frac{P_{нас1}}{P_{нас2}} = 36\%$.

М8.1 Найдите шесть различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на каждое из остальных чисел.

Решение. В качестве одного из возможных примеров приведем набор a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9 для некоторого натурального $a > 1$.

М8.2 Число 14641, как нетрудно проверить, является точной четвёртой степенью. Докажите, что если между цифрами этого числа написать по одному и тому же количеству нулей, то полученное число тоже будет являться точной четвёртой степенью.

Решение. Пусть между цифрами вставили n нулей. Обозначим $10^{n+1} = p$. Тогда полученное число равно $1 + 4p + 6p^2 + 4p^3 + p^4 = (1 + p)^4$.

М8.3 Точки K и L — середины сторон AB и BC правильного шестиугольника $ABCDEF$ (выпуклого шестиугольника, у которого все стороны равны между собой и все углы равны между собой). Отрезки KD и LE пересекаются в точке M. Площадь треугольника DEM равна 12. Найдите площадь четырёхугольника $KBLM$.

Решение. Площади четырехугольников $KBCD$ и $LCDE$ равны. Вычитая площадь общей части $LCDM$, получим равенство площадей треугольника MDE и четырехугольника $KBLM$.

М8.4 Для многочлена $x^2 + px + q$ сумма $p + q = 2016$. Известно, что корни многочлена — целые. Найдите эти корни.
Указание. 2017 — простое число.

Решение. По теореме Виета $p + q = 2016 = -x_1 - x_2 + x_1x_2$, откуда $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2017$. Поэтому корни — либо пара $\{2, 2018\}$, либо $\{0, -2016\}$.

Ф9.1 В калориметр, содержащий $m_1 = 2$ кг льда при температуре $t_1 = -5°C$, добавили $m_2 = 200$ г воды при температуре $t_2 = +5°C$. Сколько льда будет в калориметре после установления равновесия? Теплоёмкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг·$°C$), теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·$°C$), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг.

Решение. Лёд нагревается, а вода охлаждается и, частично или вся, замерзает. Если замерзла только часть воды, то конечная температура равна $t = 0°C$ и уравнение теплового баланса запишется так: $m_1(t_0 - t_1)c_л = m_2(t_2 - t_0)c_в + \Delta m\lambda$. Отсюда

$$\Delta m = \frac{m_1(t_0 - t_1)c_л - m_2(t_2 - t_0)c_в}{\lambda} = 0{,}05 \text{ кг}.$$

Итак, льда будет 2,05 кг.

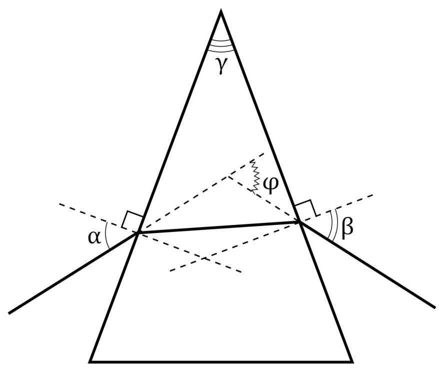
Ф9.2 Оцените, на сколько ошибутся весы, если, находясь на экваторе, положить на них груз массой 100 кг. Весы калибровались на полюсе Земли. Считать $g = 9{,}8\frac{м}{с^2}$, $R_{Земли} = 6400$км.

Решение. Весы измеряют силу, с которой на них действует груз. На экваторе груз будет двигаться с дополнительным ускорением, вызванным вращением Земли. Запишем второй закон Ньютона $ma = mg - N$ и выразим из него силу реакции опоры $N = m(g - a)$. Показания весов — это сила реакции опоры, деленная на g: $m_1 = \dfrac{N}{g} = m\left(1 - \dfrac{a}{g}\right)$.
Вычислим ошибку показаний $\Delta m = m - m_1 = \dfrac{ma}{g}$. Ускорение, вызванное вращением Земли, запишется через период следующим образом: $a = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$. Ошибка показаний: $\Delta m = m \cdot \dfrac{4\pi^2 R}{gT^2} =$ $= 2{,}1$кг.

Ф9.3 Шарик, подвешенный на нити и изначально отклонённый на угол $\alpha_1 = 30°$, отпускают, после чего он ударяется о стенку и снова отклоняется, причём его новый максимальный угол отклонения равен $\alpha_2 = 29°$. Считая, что половина энергии удара переходит в теплоту и идет на равномерный нагрев шарика, оцените изменение его температуры после удара. Длина нити $R = 0{,}1$ м, удельная теплоёмкость шарика $c = 400$ Дж/кг$°C$.

Решение. Запишем закон сохранения энергии: $0.5mgR((1-\cos\alpha_1)-(1-\cos\alpha_2)) = cm\triangle t$, откуда $gR\sin\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sin\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \approx 0{,}5gR\sin\alpha_1\triangle\alpha = c\triangle t \Rightarrow \triangle t = \dfrac{gR}{2c}\sin\alpha_1\triangle\alpha \approx \dfrac{2\pi}{180}\dfrac{10\cdot 0.1}{400}\dfrac{1}{4} \approx$ $\approx 2\cdot 10^{-5}$K.

Ф9.4 На призму с преломляющим углом γ падает луч (см. рисунок). Считая угол падения α на призму и угол выхода из призмы β малыми, определить угол φ, на который отклоняется луч. Для сред «воздух» и «материал призмы» относительный показатель преломления известен и равен n.



Решение. Пусть угол преломления при попадании в призму $\tilde\alpha$, а угол падения на границу «призма-воздух» перед выходом из призмы — $\tilde\beta$. В силу малости углов из закона Снеллиуса получаем: $\tilde\alpha = \dfrac{\alpha}{n}$ и $\tilde\beta = \dfrac{\beta}{n}$. Для углов $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ получаем соотношения: $\tilde\alpha + \tilde\beta = \dfrac{\alpha + \beta}{n} = \gamma$, а учитывая, что угол φ внешний для треугольника, в котором не смежные с ним углы равны $\alpha - \tilde\alpha$ и $\beta - \tilde\beta$, получим $\dfrac{n-1}{n}(\alpha + \beta) = \varphi$. Тогда можем найти $\varphi = (n-1)\gamma$.

M9.1 Число 14641, как нетрудно проверить, является точной четвёртой степенью. Докажите, что если между цифрами этого числа написать по одному и тому же количеству нулей, то полученное число тоже будет являться точной четвёртой степенью.

Решение. Пусть между цифрами вставили n нулей. Обозначим $10^{n+1} = p$. Тогда полученное число равно $1 + 4p + 6p^2 + 4p^3 + p^4 = (1 + p)^4$.

M9.2 Натуральное число N таково, что если к нему добавить $8 = 2^3$ или $81 = 3^4$, то получится два точных квадрата. Найдите все возможные значения N.

Решение. $N + 2^3 = n^2$ и $N + 3^4 = m^2$, откуда после вычитания находим $73 = (m - n)(m + n)$, поэтому $m - n = 1$, $m + n = 73$. Находим $m = 37$, и, следовательно, $N = 1288$.

M9.3 Вычислите сумму

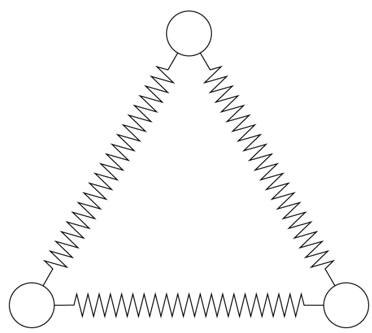
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Решение. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} = \dfrac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a} = \sqrt{a+1}-\sqrt{a}$. Используя эту формулу, преобразуем все слагаемые в рассматриваемой сумме. Останутся только $\sqrt{100} - 1 = 9$.

M9.4 В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали перпендикулярны, а длина средней линии равна m. На большем основании AD выбрана точка M, такая, что $AM = m$. Найдите длину отрезка MC.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. Через вершину C проведем прямую, параллельную BD, до пересечения с прямой AD в точке K. Треугольники AOD и ACK подобны, следовательно, угол ACK — прямой. По построению, $DBCK$ — параллелограмм, следовательно, $DK = BC$. Значит, $AK = AD + BC = 2m$, следовательно, M — середина AK. Таким образом, в прямоугольном треугольнике ACK отрезок CM — медиана к гипотенузе, он равен ее половине, то есть m.

Ф10.1 Три шарика соединены с помощью трёх одинаковых непроводящих пружин жесткости $\gamma = 100$ Н/м в равносторонний треугольник со стороной $l = 10$ см. Каждому шарику сообщают небольшой заряд $q = 2{,}72 \cdot 10^{-7}$ Кл. Найдите относительное удлинение пружины $\dfrac{\Delta l}{l}$, считая Δl малым по сравнению со стороной равностороннего треугольника.
Указание: нелинейными по Δl слагаемыми пренебречь. Для малых x можно приближенно считать $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$.



Решение: После удлинения на каждый шарик действует сила со стороны двух других заряженных шариков, а также сила упругости от каждой из двух прилегающих пружин. В силу симметрии условием равновесия является равенство

$$\gamma\Delta l = \frac{kq^2}{(l+\Delta l)^2} \approx \frac{kq^2}{l^2 + 2l\Delta l} \Leftrightarrow \gamma l^2 \Delta l = \frac{kq^2}{1 + 2\frac{\Delta l}{l}} \approx kq^2 \left(1 - 2\frac{\Delta l}{l}\right).$$

Находим тогда $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{1}{2 + \frac{\gamma l^3}{kq^2}} \approx \dfrac{1}{152} \approx 0{,}007.$

Замечание: можно было сразу отбросить $2\dfrac{\Delta l}{l}$ в знаменателе правой части $\gamma l^2 \Delta l = \dfrac{kq^2}{1 + 2\frac{\Delta l}{l}}$ и получить $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{kq^2}{\gamma l^3} \approx \dfrac{1}{150}$.

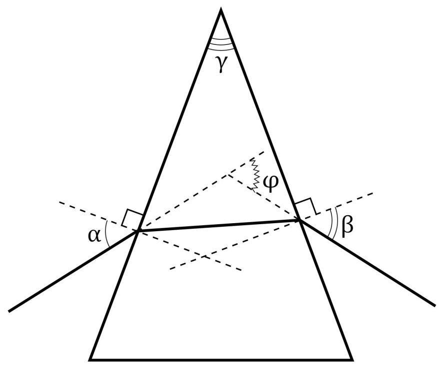
Ф10.2 Шарик, подвешенный на нити и изначально отклонённый на угол $\alpha_1 = 30°$, отпускают, после чего он ударяется о стенку и снова отклоняется, причём его новый максимальный угол отклонения равен $\alpha_2 = 29°$. Считая, что половина энергии удара переходит в теплоту и идет на равномерный нагрев шарика, оцените изменение его температуры после удара. Длина нити $R = 0{,}1$ м, удельная теплоёмкость шарика $c = 400$ Дж/кг$^\circ C$.

Решение. Запишем закон сохранения энергии: $0.5mgR((1-\cos\alpha_1) - (1-\cos\alpha_2)) = cm\triangle t$, откуда $gR\sin\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \approx 0{,}5gR\sin\alpha_1\triangle\alpha = c\triangle t \Rightarrow \triangle t = \dfrac{gR}{2c}\sin\alpha_1\triangle\alpha \approx \dfrac{2\pi}{180}\dfrac{10\cdot 0.1}{400}\dfrac{1}{4} \approx$
$\approx 2\cdot 10^{-5}$K.

Ф10.3 Сосуд разделен на $N+1$ одинаковых отсеков N теплонепроницаемыми поршнями, которые испытывают сухое трение о сосуд. Сила трения равна F. Первый отсек нагревают до тех пор, пока давление в нем не увеличится в 2 раза. Температуру во всех сосудах, кроме первого поддерживают постоянной. Найдите, во сколько раз изменился объем в противоположном отсеке, если сечение сосуда — S, а начальное давление в отсеках — P_0. Силу трения считать много меньше силы давления газа.

Решение. На каждом из N поршней «теряется» по $P = \dfrac{F}{S}$ давления. Итого давление, оказываемое на крайний отсек, составит $P = P_1 - \dfrac{NF}{S}$.
Процесс изотермический, поэтому отношение объемов равно обратному отношению давлений: $\dfrac{V}{V_0} = \dfrac{P_0}{P} = \dfrac{P_0}{2P_0 - \dfrac{NF}{S}}$.

Ф10.4 На призму с преломляющим углом γ падает луч (см. рисунок). Считая угол падения α на призму и угол выхода из призмы β малыми, определить угол φ, на который отклоняется луч. Для сред «воздух» и «материал призмы» относительный показатель преломления известен и равен n.



Решение. Пусть угол преломления при попадании в призму $\tilde{\alpha}$, а угол падения на границу «призма-воздух» перед выходом из призмы — $\tilde{\beta}$. В силу малости углов из закона Снеллиуса получаем: $\tilde{\alpha} = \dfrac{\alpha}{n}$ и $\tilde{\beta} = \dfrac{\beta}{n}$. Для углов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ получаем соотношения: $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \dfrac{\alpha + \beta}{n} = \gamma$, а учитывая, что угол φ внешний для треугольника, в котором не смежные с ним углы равны $\alpha - \tilde{\alpha}$ и $\beta - \tilde{\beta}$, получим $\dfrac{n-1}{n}(\alpha + \beta) = \varphi$. Тогда можем найти $\varphi = (n-1)\gamma$.

М10.1 Найдите все такие непрерывные функции $f(x)$ с положительными значениями, что при каждых x и z справедливо $f(x+z)f(z) = f(x)$.

Решение. Подставив $z = 0$, найдем $f(0) = 1$. Подставив $x = 0$, найдем $f^2(z) = f(0) = 1$, откуда $f(z) = 1$ для всех z.

М10.2 Какое наименьшее количество множителей нужно вычеркнуть из произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99$, чтобы последняя цифра произведения оставшихся множителей была равна 3?

Решение. Последняя цифра нечётна и не является пятёркой, поэтому обязательно придётся вычеркнуть все кратные пяти и чётные. Последняя цифра после этого станет равна последней цифре произведения $(1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9)^{10}$, т. е. 1. Вычеркнем ещё число 7, тогда первые 8 произведений $(1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9)^8$ дадут 1, а еще две скобки $(1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9$ — последняя цифра равна 3, как и требовалось. Итак, наименьшее количество чисел, которое нужно вычеркнуть, равно 60.

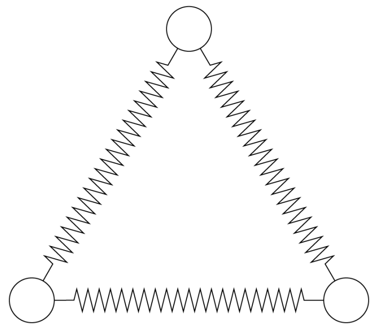
М10.3 Окружность, центр которой лежит вне квадрата $ABCD$, проходит через точки B, C. Найдите угол между касательными к окружности, проведенными из точки D, если отношение длины стороны квадрата к диаметру окружности равно $\dfrac{3}{5}$.

Решение. Направим ось x вдоль DA, а ось y вдоль DC. В этой системе координат окружность имеет уравнение $(x - 0{,}6R)^2 + (y - 2R)^2 = R^2$, а касательные имеют вид $y = k_1 x$ и $y = k_2 x$. Найдем k_1 и k_2, подставив $y = kx$ в уравнение окружности, и приравняв дискриминант нулю: $x^2 - \dfrac{6}{5}xR + \dfrac{9}{25}R^2 + k^2x^2 - 4kxR + 4R^2 = R^2$, откуда $(1+k^2)x^2 - xR\left(\dfrac{6}{5} + 2k\right) + \dfrac{84}{25}R^2 = 0$; $D = R^2\left(\dfrac{6}{5} + 2k\right)^2 - 4\dfrac{84}{25}R^2(1+k^2) = 0$. Получаем уравнение $\left(\dfrac{6}{5} + 4k\right)^2 - 4 \cdot \dfrac{84}{25}(1+k^2) = 0$, откуда $k = \dfrac{5}{8}(-3 \pm \sqrt{21})$. Остается найти угол между двумя прямыми по формуле $|\operatorname{tg}\alpha| = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right| = \dfrac{20\sqrt{21}}{59}$.

М10.4 Решите в натуральных числах уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$.

Решение. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно одной из переменных, например, x: $x^2 - x(y+1) + y^2 - y = 0$. Дискриминант должен являться полным квадратом: $(y+1)^2 - 4y^2 + 4y = k^2$, откуда $-3y^2 + 6y + 1 = k^2$. Выделим полный квадрат в правой части: $-3(y-1)^2 + 4 = k^2$, откуда $k^2 + 3(y-1)^2 = 4$. Обозначим $y - 1 = z$. Тогда число z не больше единицы: остается рассмотреть случаи $z = 0$ и $z = 1$: при этом $y = 1$ или $y = 2$. Итого находим 4 решения: $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

Ф11.1 Три шарика соединены с помощью трёх одинаковых непроводящих пружин жесткости $\gamma = 100$ Н/м в равносторонний треугольник со стороной $l = 10$ см. Каждому шарику сообщают небольшой заряд $q = 2{,}72 \cdot 10^{-7}$ Кл. Найдите относительное удлинение пружины $\dfrac{\Delta l}{l}$, считая Δl малым по сравнению со стороной равностороннего треугольника. Ответ округлите до первой ненулевой цифры после запятой.
Указание: нелинейными по Δl слагаемыми пренебречь. Для малых x можно приближенно считать $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$.



Решение: После удлинения на каждый шарик действует сила со стороны двух других заряженных шариков, а также сила упругости от каждой из двух прилегающих пружин. В силу симметрии условием равновесия является равенство

$$\gamma \Delta l = \frac{kq^2}{(l+\Delta l)^2} \approx \frac{kq^2}{l^2 + 2l\Delta l} \Leftrightarrow \gamma l^2 \Delta l = \frac{kq^2}{1 + 2\frac{\Delta l}{l}} \approx kq^2\left(1 - 2\frac{\Delta l}{l}\right).$$

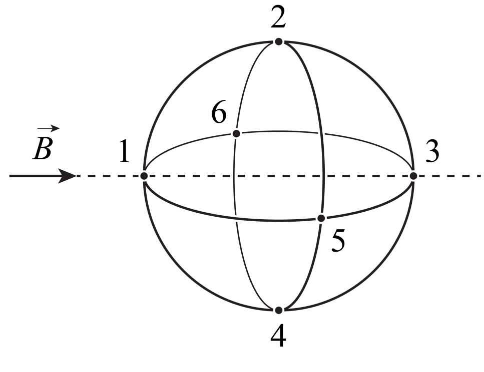
Находим тогда $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{1}{2 + \frac{\gamma l^3}{kq^2}} \approx \dfrac{1}{152} \approx 0{,}007.$

Замечание: можно было сразу отбросить $2\dfrac{\Delta l}{l}$ в знаменателе правой части $\gamma l^2 \Delta l = \dfrac{kq^2}{1 + 2\frac{\Delta l}{l}}$ и получить $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{kq^2}{\gamma l^3} \approx \dfrac{1}{150}$.

Ф11.2 В простейшей модели частицы-переносчика два тела обмениваются частицами с некоторой периодичностью, благодаря чему между ними возникает сила. Во время обмена одно тело испускает частицу-переносчик, отдавая некоторый импульс, а другое поглощает её, получая некоторый импульс. С каким периодом два заряда Q, находящиеся на расстоянии R, обмениваются частицами-переносчиками, если частица-переносчик двигается со скоростью света и несет импульс p? Периодом называется время, за которое обе частицы последовательно передают друг другу по частице-переносчику.

Решение. Вычислим силу взаимодействия между двумя зарядами: $F = k\dfrac{Q^2}{R^2}$. Теперь запишем второй закон Ньютона: $\dfrac{\Delta P}{\Delta t} = F$. Обменявшись одной частицей-переносчиком за время $T/2$ (половину периода обмена) тело изменит свой импульс на p. Подставим это во второй закон Ньютона: $\dfrac{2p}{T} = F = k\dfrac{Q^2}{R^2}$. Выражаем отсюда период обмена $T = \dfrac{2pR^2}{kQ^2}$.

Ф11.3 Сфера из проволки помещена в магнитное поле, изменяющееся со временем по закону $B = B_0 + \beta t$. Найдите токи, текущие по каждому участку проволки, если радиус сферы равен r, а удельное сопротивление единицы длины равно ρ.



Решение. Используем закон индукции Фарадея. В магнитный поток в качестве множителя входит проекция площади контура, перпендикулярная полю. Поэтому далее мы будем работать с проекцией сферы на плоскость.

Токи, текущие по всем ребрам, кроме окружности 2-6-4-5-2 компенсируют друг друга, поэтому ток пойдет только по этой окружности. Найдем его величину: $\mathscr{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d}{dt}[BS] = -\pi r^2 \dfrac{d}{dt}[B] = \beta\pi r^2$. Теперь найдем сопротивление этого кольца: $R = 2\pi r\rho$. Тогда сила тока будет равна $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R} = \dfrac{\beta r}{2\rho}$. В остальных контурах ток равен нулю.

Ф11.4 Сосуд разделен на $N+1$ одинаковых отсеков N теплонепроницаемыми поршнями, которые испытывают сухое трение о сосуд. Сила трения равна F. Первый отсек нагревают до тех пор, пока давление в нем не увеличится в 2 раза. Температуру во всех сосудах, кроме первого поддерживают постоянной. Найдите, во сколько раз изменился объем в противоположном отсеке, если сечение сосуда — S, а начальное давление в отсеках — P_0. Силу трения считать много меньше силы давления газа.

Решение. На каждом из N поршней «теряется» по $P = \dfrac{F}{S}$ давления. Итого давление, оказываемое на крайний отсек, составит $P = P_1 - \dfrac{NF}{S}$. Процесс изотермический, поэтому отношение объемов равно обратному отношению давлений: $\dfrac{V}{V_0} = \dfrac{P_0}{P} = \dfrac{P_0}{2P_0 - \dfrac{NF}{S}}$.

М11.1 Для многочлена x^2+px+q сумма $p+q = 2016$. Известно, что корни многочлена — целые. Найдите эти корни.
Указание. 2017 — простое число.

Решение. По теореме Виета $p + q = 2016 = -x_1 - x_2 + x_1x_2$, откуда $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2017$. Поэтому корни — либо пара $\{2, 2018\}$, либо $\{0, -2016\}$.

М11.2 Пусть $X = \{1, \dots, n\}$ — множество натуральных чисел от 1 до n. Найдите число способов взять k подмножеств $X_1, \dots, X_k$ множества X таких, что их пересечение пусто. Некоторые из множеств могут быть пустыми, а некоторые могут совпадать.

Решение. Каждый элемент множества X может лежать в любом количестве из этих k подмножеств, кроме варианта лежать сразу во всех этих подмножествах. Для одного элемента выбор подмножеств, которым он принадлежит, можно осуществить $2^k - 1$ способами. По правилу произведения искомое количество способов есть $(2^k - 1)^n$.

М11.3 В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали перпендикулярны, а длина средней линии равна m. На большем основании AD выбрана точка M, такая, что $AM = m$. Найдите длину отрезка MC.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. Через вершину C проведем прямую, параллельную BD, до пересечения с прямой AD в точке K. Треугольники AOD и ACK подобны, следовательно, угол ACK — прямой. По построению, $DBCK$ — параллелограмм, следовательно, $DK = BC$. Значит, $AK = AD + BC = 2m$, следовательно, M — середина AK. Таким образом, в прямоугольном треугольнике ACK отрезок CM — медиана к гипотенузе, он равен ее половине, то есть m.

М11.4 Решите систему

$$\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^{2018} + y^{2018} = 1 \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения $(x - y)(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0$. Но из второго — $|x|$ и $|y| < 1$, поэтому вторая скобка имеет постоянный знак. Это значит, что $x = y$. Из второго уравнения находим $x = y = \pm \sqrt[2018]{1/2}$.