Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Межвузовский центр воспитания и развития
талантливой молодежи в области
естественно-математических наук
«Физтех-центр»

# Вычисление сумм

Составитель: Останин П. А.

# Дифференцирование

## Геометрическая прогрессия

В школьных олимпиадах и на различных математических кружках часто требуется доказать некоторые тождества, как, например, следующие:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Доказательство этих тожеств по индукции не сложно, но оставляет открытым вопрос: откуда же взялись формулы в правых частях? Ведь если они неизвестны, перед доказательством нужно сначала догадаться до компактного свёрнутого вида.

В этой главе мы рассмотрим один из способов получения самих этих формул с помощью вычисления производных. Способ позволяет в явном виде вычислить, чему равна сумма $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m$ при любом конкретном $m$, причем это вычисление, как будет видно, будет в том числе и доказательством соответствующего тождества.

При первом ознакомлении этот способ может показаться достаточно сложным, но не стоит пугаться — все теоретические обоснования будут приведены и подробно разобраны, а после самостоятельного повторения приведенных выкладок на упражнениях Вы будете легко пользоваться этой техникой.

Получим первую из записанных выше формул. Будем использовать известную из школьного курса формулу суммы геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

справедливую при $x \neq 1$. Это равенство можно рассматривать как равенство функций от $x$, записанных в левой и правой частях. Продифференцируем равенство по $x$:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}.$$

Левая часть при $x = 1$ обращается в $\sum\limits_{k=1}^{n} k$, что нам и требовалось.

Однако, просто подставить $x = 1$ в левую часть не получится, в знаменателе образуется ноль.

Тем не менее, слева стоит непрерывная всюду функция —многочлен. Равенство правой части выполнено во всех точках числовой оси, кроме $x = 1$. Значит, предельное значение правой части существует и равно значению левой части в единице, то есть тому, что мы ищем.

Итак, задача свелась к тому, чтобы вычислить

$$\lim_{x\to 1} \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}.$$

Заметим, что имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ — при подстановке $x = 1$ и числитель, и знаменатель обращаются в ноль. Предел будем вычислять с использованием правила Лопиталя. В данном частном случае числитель и знаменатель являются многочленами, для этого конкретного случая в последнем разделе приведена формулировка и доказательство используемого правила.

Чтобы вычислить этот предел, дифференцируем отдельно числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{((n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1))'}{((x-1)^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{n(n+1)x^{n-1}(x-1)+(n+1)x^n-(n+1)x^n}{2(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{n(n+1)x^{n-1}(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2}$$

В последнем переходе мы сократили под знаком предела в числителе и знаменателе $x = 1$. Это правомерно, поскольку предел функции зависит от её поведения в проколотой окрестности единицы — в самой точке $x = 1$ значение не рассматривается. В этой проколотой окрестности $x - 1 \neq 0$, и на этот множитель дробь можно сократить.

Теперь под знаком предела стоит уже непрерывная в $x = 1$ функция — для вычисления предела достаточно просто подставить $x = 1$ и получить требуемое равенство.

Мы специально привели подробное решение. На практике оно, естественно, получается короче. Закрепим полученный результат: выведем вторую из формул, приведенных в начале.

После первого дифференцирования суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ показатели слагаемых стали равны $(k-1)$:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

Далее есть два пути. Первый вариант — просто продифференцировать эту функцию еще раз, и получить в качестве множителя при $x^{k-2}$ коэффициент $k(k-1)$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)x^{k-2}.$$

Тогда мы сможем вычислить сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} k$. Но вторую сумму мы уже вычислили, останется лишь подставить её значение. Второй путь заключается в следующем: домножим продифференцированную один раз функцию на $x$ и получим $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k$. Ясно, что теперь нужно еще раз продифференцировать это выражение по $x$ и получить $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2x^{k-1}$, а затем положить $x = 1$. В правой части нужно будет перейти к пределу $\lim\limits_{x\to 1} \left( x \left( \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \right)' \right)'$.

Два способа совершенно эквивалентны, но на практике первый содержит меньше вычислений, поэтому выберем этот путь.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \lim_{x\to 1} \left( \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \right)'' = \lim_{x\to 1} \left( \frac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1}+1}{(x-1)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{x\to 1} \Bigg( \frac{(n+1)nx^{n-1}(x-1) + (n+1)x^n - (n+1)x^n}{(x-1)^2} -$$

$$-2\frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - x^{n+1}+1}{(x-1)^3} \Bigg)$$

*Замечание:* при взятии производной от дроби часто оказывается быстрее воспользоваться не формулой производной дроби, а формулой производной произведения, что мы только что и использовали:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left[\frac{1}{g(x)} = z(x)\right] = (f(x)z(x))' = f'z + fz' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}.$$

На этом этапе видно, зачем мы пошли первым путём: в числителях дробей под знаком предела достаточно много исчезающих слагаемых. Далее нам трижды потребуется использовать правило Лопиталя. После этого в знаменателе останется 6, а в числителе — многочлен, отличный от нуля при $x = 1$. Найдем третью производную числителя $f(x)$ в единице:

$$f(x) = n(n-1)x^{n+1} - 2(n-1)(n+1)x^n + n(n+1)x^{n-1} - 2$$

$$f'''(1) = (n-1)^2 n^2 (n+1) - 2(n-2)(n-1)^2 n(n+1) +$$
$$+ (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1) = 2n(n^2-1).$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}(k^2 - k) = \dfrac{2n(n-1)(n+1)}{6} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 - \dfrac{n(n+1)}{2}$, откуда и следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

*Упражнение 1:* вычислите вторую сумму вторым способом — с промежуточным домножением на $x$ между двумя дифференцированиями.

*Упражнение 2:* вычислите $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)$ и с помощью найденного значения получите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

## Бином Ньютона

Еще одна присутствующая в школьных олимпиадах сумма — бином Ньютона: $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = (x+y)^n, n \in \mathbb{N}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из $n$ предметов по $k$ штук.

С помощью этой формулы, положив $x = y = 1$, можно получить, что $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, а положив $x = -y = 1$ — уже новую формулу: $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (-1)^k = 0$. Но с помощью техники, представленной в первом параграфе, из бинома Ньютона можно извлечь и более интересные тождества с суммами чисел сочетаний.

Положим $y = 1$. Тогда тождество $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^n$ представляет равенство двух функций от одной переменной. Дифференцирование по $x$ даёт следующее равенство:

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Положим теперь в нем $x = 1$ и получим $\sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k = n2^{n-1}$.

*Замечание 1:* обращаем внимание на следующую часто допускаемую неточность: если в последнем равенстве положить $x = -1$, то ноль получится только при $n > 1$.

*Замечание 2:* всем полученным в этом разделе формулам можно дать и комбинаторные смысл и доказательства, представленные способы и методы — далеко не единственные.

*Упражнение 1:* Вычислите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k k^2$ и найдите все значения $n$, при которых она равна нулю.

*Упражнение 2 (для читателей, знакомых с интегрированием):* С помощью интегрирования бинома по $x$ от нуля до 1 вычислите сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

Рассмотрим еще два приёма, полезных в случаях некоторых сумм.

- Вычислим $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

Для этого рассмотрим вспомогательное очевидное тождество:

$$(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}.$$

Коэффициент при $x^n$ в правой части равен $C_{2n}^n$, а в левой части — сумме $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$. Последний переход был сделан с помощью тождества Паскаля: $C_n^k = C_n^{n-k}$, которое можно доказать, например, записав формулу для числа сочетаний.
Подбор подходящих многочленов, как в этом примере — задача в общем случае нетривиальная, требующая некоторых усилий.

- Другой пример — сумма $\sum\limits_{k=0}^{n/2} C_n^{2k}$.

Для ее вычисления применим следующий приём: пусть $P(x)$ — многочлен. Тогда многочлен $\frac{1}{2}(P(x) + P(-x))$ содержит только все одночлены $P(x)$ с чётной степенью $x$.

В нашем случае это означает, что искомая сумма равна значению в $x = 1$ функции $\frac{1}{2}((1+x)^n + (1-x)^n)$, т. е. $2^{n-1}$.

*Замечание:* для всякой функции $f(x)$ существует разложение

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

на чётную и нечётную части.

*Пример.* Эта задача была предложена учащимся 10 класса на олимпиаде первого дня летней школы Phystech.International 2016.

В числителе и знаменателе дробно-рациональной функции

$$f(x) = \frac{(x + x^2 + x^5)^{2016}}{(1 + x^2 + x^4)^{2016}}$$

раскрыли все скобки и занулили все коэффициенты при всех нечётных степенях $x$. Полученную дробно-рациональную функцию обозначили через $g(x)$. Найдите $g(-1)$ с точностью до десятых.

*Решение.* Знаменатель при переходе от $f$ к $g$ не изменился. Пусть $h(x) = (x+x^2+x^5)^{2016}$. Тогда $\dfrac{h(x)+h(-x)}{2}$ после раскрытия всех скобок содержит все слагаемые из $h$ с чётной степенью $x$ и не содержит слагаемых с нечётной степенью $x$, т. е. $\dfrac{h(x)+h(-x)}{2}$ — числитель $g(x)$. Тогда $g(x) = \dfrac{h(x)+h(-x)}{2(1+x^2+x^4)^{2016}} = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.

Остается подставить $x = -1$: $g(-1) = \dfrac{1}{2 \cdot 3^{2016}} + \dfrac{3^{2016}}{2 \cdot 3^{2016}}$.

Ясно, что первое слагаемое не вносит изменений в целую часть и первый знак после запятой. Поэтому с искомой точностью ответ равен 0,5.

## Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия*

В данном разделе мы коснёмся единственного ряда, присутствующего в школьной программе — суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
Известно, что при $-1 < x < 1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Рассмотрим следующую задачу, предложенную школьникам на летней школе Физтех.СНГ в 2015 году:

*Задача.* Найдите сумму $1 + q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots$, если $0 < q < 1$.

*Первое решение.* Обозначим искомую сумму $S = S(q)$.
Домножим на $q$: $qS = q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \cdots$.
Вычтем полученную сумму из $S$ и прибавим $q$:

$$S - qS + q = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}.$$

Выразим результат: $S = \dfrac{1 - q + q^2}{(1-q)^2}$.

*Второе решение.* Искомая сумма $S = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots = (1 + q + q^2 + \cdots) + (q^2 + q^3 + \cdots) + (q^3 + q^4 + \cdots) + \cdots$.
Вынесем из каждой скобки первое слагаемое в ней: $S = (1 + q + q^2 + \cdots) + q^2(1 + q + q^2 + \cdots) + q^3(1 + q + q^2 + \cdots) + \cdots = (1 + q + q^2 + \cdots)(1 + q^2 + q^3 + \cdots)$.
В каждой скобке осталась одна и та же бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Запишем ее для удобства в квадратных скобках:

$$S = \left[\frac{1}{1-q}\right]\left(\frac{1}{1-q} - q\right).$$

Результат совпадает с результатом первого решения.

Этим можно было бы и ограничить рассмотрение задачи. Но для целостности картины для интересующегося читателя приведем и третье решение.

Известно, что всякий степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ сходится в точности при $x$, лежащих в некотором интервале $(-R, R)$, где число $R$ называется радиусом сходимости этого ряда. Радиус сходимости зависит от коэффициентов $a_k$ рассматриваемого ряда и может принимать любое неотрицательное значение. На границе, при $x = \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться, а если вдруг окажется, что $R = 0$, то это будет означать, что он не сходится ни при каких значениях $x$, кроме нуля.
Полезными для нас в данном случае будут следующие два свойства:

- Если ряд сходится при некотором $x = |a|$, то при всех меньших по модулю значениях $x$ он также сходится.

- Внутри $(-R, R)$ ряд можно почленно дифференцировать.

В нашем случае известно, что ряд для геометрической прогрессии сходится при $x \in (-1, 1)$ и расходится вне этого интервала, т. е. $R = 1$. Это означает, что внутри $(-1, 1)$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = x \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Искомая в задаче сумма равна $1 + \sum\limits_{k=0}^{n} kq^k = 1 + \dfrac{q}{(1-q)^2} = \\ = \dfrac{1 - q + q^2}{(1-q)^2}$.

## Телескопические суммы

Предположим, что требуется вычислить сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$, а функция $f(k)$ натурального аргумента такова, что существует другая функция $F(k)$ такая, что $f(k) = F(k+1) - F(k)$. Тогда наша сумма запишется в виде

$$\sum_{k=0}^{n} F(k+1) - F(k) =$$

$$= F(1) - F(0) + F(2) - F(1) + F(3) - F(2) + \cdots + F(n+1) - F(n).$$

Ясно, что в последней сумме останутся только $F(n+1)$ и $F(0)$, т. е. $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k) = F(n+1) - F(n)$.

**Определение 1.** Функция $F(n)$ называется **телескопией** для $f(n)$. Соответствующая сумма $\sum\limits_{k=0}^{n} f(k)$ называется **телескопической**.

*Пример:* для суммы $\sum\limits_{k=a}^{b} \frac{1}{k(k+1)}$ функция $F(k) = \frac{-1}{k}$ является телескопией. Значение этой суммы равно $\left(\frac{-1}{b+1} - \frac{-1}{a}\right)$

*Пример:* для геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ телескопией будет $F(k) = \frac{x^k}{x-1}$

*Упражнение:* Проверить, что для суммы синусов $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ телескопией является функция $F(k) = -\frac{\cos \frac{2k-1}{2}x}{2\sin \frac{x}{2}}$. Вычислить само значение суммы синусов.

# Правило Лопиталя в случае многочленов

Пусть два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ при $x = a$ имеют нуль кратности $k$. Покажем, что в этом случае число $L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P^{(k)}(a)}{Q^{(k)}(a)}$.

Сделаем замену $y = x - a$. Тогда многочлены $\tilde{P}(y) = P(y + a)$ и $\tilde{Q}(y) = Q(y+a)$ имеют нуль $y = 0$ кратности $k$, а значит, их можно представить в виде $\tilde{P}(y) = y^k A(y)$ и $\tilde{Q}(y) = y^k B(y)$, причем $A(0)$ и $B(0)$ отличны от нуля. Тогда $L = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\tilde{P}(y)}{\tilde{Q}(y)} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{A(y)}{B(y)}$.

В последнем переходе сокращение на $y^k$ было произведено на основании того, что предел функции зависит от ее поведения в сколь угодно малой проколотой окрестности точки, то есть значение функции в самой точке не рассматривается. А в любой проколотой окрестности нуля $y^k \neq 0$, и на него можно сократить.

Далее, под знаком предела $\lim\limits_{y\to 0}$ теперь стоит непрерывная в нуле функция $\dfrac{A(y)}{B(y)}$. Это значит, что при вычислении этого предела можно просто подставить значение $y = 0$, т. е. $L = \dfrac{A(0)}{B(0)}$.

С другой стороны, $\dfrac{P^{(k)}(a)}{Q^{(k)}(a)} = \dfrac{\tilde{P}^{(k)}(0)}{\tilde{Q}^{(k)}(0)}$. Это отношение в произвольной точке $y$ равно $\dfrac{\tilde{P}^{(k)}(y)}{\tilde{Q}^{(k)}(y)} = \dfrac{A(y) + C_k^1 yA'(y) + \cdots + C_k^k y^k A^{(k)}(y)}{B(y) + C_k^1 yA'(y) + \cdots + C_k^k y^k B^{(k)}(y)}$, а значение в нуле есть $\dfrac{A(0)}{B(0)} = L$, что и требовалось.

*Замечание:* многочлен $P(x)$ может иметь нуль $x = a$ и более высокого порядка, чем $k$. При этом все рассуждения, приведенные выше, сохранятся, а значение предела, очевидно, равно нулю.

# Список литературы


1. Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика. — М.: ФИМА, МЦНМО, 2010. — 400 с.

2. Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу: Учебное пособие. — М.: МЦНМО, 2007. — 608 с.

3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособие/ Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.